

# Geometria não-Euclidiana básica sem coordenadas

SASHA ANAN'IN E CARLOS H. GROSSI

<b>1. Geometria e Darwin</b>	3
1.1. Os perigos de se viajar ao redor do mundo	3
1.2. Questão	4
1.3. Cogito, ergo sum	4
1.4. Guia para o leitor	5
<b>2. Espaços projetivos e seus parentes</b>	5
2.1. Problema	5
2.6. Espaço projetivo	7
2.7. Esfera e projeção estereográfica	8
2.9. Esfera de Riemann	9
2.12A. Grassmannianas	9
<b>3. Espaços suaves e funções suaves</b>	10
3.1. Observações introdutórias	10
3.2. Feixes de funções	10
3.3. Exemplo básico	10
3.4. Aplicações suaves e estruturas induzidas	11
3.5. Produto e produto fibrado	12
3.5.1. Produto	12
3.5.5. Produto fibrado	13
3.6. Fibrado tangente	13
3.6.1. Vetores tangentes	14
3.6.3. Diferencial	14
3.6.5. Fibrado tangente de um subespaço	14
3.6.8. Equações	15
3.6.10. Feixes de Taylor	15
3.6.11. Prevariedades	16
3.7. $C^\infty$ -variedades	18
3.7.2. Famílias e fibrados	18
3.7.8. Vetor tangente a uma curva	19
3.8A. Observações finais	19
<b>4. Geometria elementar</b>	20
4.1. Alguma notação	20
4.2. Espaço tangente	20
4.3. Métrica	21
4.3.2. Comprimento e ângulo	21
4.4. Exemplos	22
4.5. Geodésicas e tância	23
4.5.4. Geodésicas esféricas	23
4.5.6. Geodésicas hiperbólicas	24
4.5.7. Desigualdade triangular	24
4.5.8. Dualidade	25
4.6. Espaço de circunferências	27

4.7. Zoológico hiperbólico complexo	27
4.8. Configurações finitas	27
4.8.1. Lema roubado do Carlos	28
4.9. Não existe seno ao sul do equador	29
4.10A. Geometria no absoluto	30
4.11. Um pouco de história	31
4.11.1. Referências	32
<b>5. Superfícies de Riemann</b>	32
5.1. Recobrimento regular e grupo fundamental	32
5.2. Grupos discretos e teorema poligonal de Poincaré	32
5.3. Espaço de Teichmüller	32
<b>6. Apêndice: Largo al factotum della citta</b>	33
6.15. Ortogonalização de Gram-Schmidt	34
6.20. Lei da inércia de Sylvester	35
6.21. Critério de Sylvester	36
<b>7. Apêndice: Álgebra básica e topologia</b>	37
<b>8. Apêndice: Classificação de superfícies compactas</b>	37
<b>9A. Apêndice: Geometria riemanniana</b>	37
<b>10A. Apêndice: Superfícies hiperelípticas e teorema de Goldman</b>	37
<b>Dicas</b>	38
1.2.	38
2.3.	38
2.5.	38
2.10.	38
2.11.	38
3.3.2.	38
3.3.3.	38
3.3.4.	38
3.6.6.	38
4.3.3.	38
4.4.1.	39
4.5.2.	39
4.5.9.	39
4.5.12.	39
4.8.2.	39
6.5.	39
6.6.	39
6.7.	39
6.9.	39
6.10.	39
6.23.	39
6.24.	39
6.25.	39

# Geometria não-Euclidiana básica sem coordenadas

SASHA ANAN'IN E CARLOS H. GROSSI

*A introdução de números como coordenadas ... é um ato de violência ...*

— HERMANN WEYL, *Filosofia da Matemática e Ciência Natural*

*'You see, the earth takes twenty-four hours to turn round on its axis—'*

*'Talking of axes,' said the Duchess, 'chop off her head!'*

— LEWIS CARROLL, *Alice's Adventures in Wonderland*

## 1. Geometria e Darwin

O tema deste curso é profundamente relacionado a três grandes geômetras: Riemann, Klein e Poincaré. Através do estudo das geometrias esférica e hiperbólica planas,<sup>1</sup> buscamos antigir o modesto objetivo de ilustrar algumas das contribuições destes geômetras. No caminho, encontraremos ferramentas descobertas recentemente.

A intuição geométrica humana é consideravelmente mais forte do que a algébrica por uma razão óbvia: desde a Idade da Pedra, temos grande experiência em movimentação espacial, mas muito pouca em contagem.<sup>2</sup>

As geometrias planas têm forte influência na geometria moderna, o que pode ser parcialmente explicado em uma base biológica. Pássaros são certamente excelentes geômetras: basta ver como eles expressam sua (provável) felicidade com sofisticadas piruetas em três dimensões quando termina a chuva. Serpentes devem ser boas topólogas. (Em breve, estudaremos um pouquinho de topologia.) Infelizmente, a experiência dos seres humanos é praticamente bidimensional, no máximo 2.5-dimensional. Os que acreditam na teoria de Darwin podem quicá ter herdado a experiência tridimensional dos macacos, mas na verdade duvidamos que tal teoria<sup>3</sup> seja válida: nunca vimos um macaco tornar-se homem, mas estamos cansados de ver algo similar ocorrer na direção contrária. Portanto, para que estejamos bem equipados para o nosso futuro, é essencial estudar a geometria. (Veja, a título de ilustração, o sítio <http://www.ihes.fr/~gromov> de Misha Gromov, um dos maiores geômetras dos nossos tempos.)

**1.1. Os perigos de se viajar ao redor do mundo.** Em três dimensões, o ser humano possui duas pernas. Isto parece suficiente, apesar de que cairíamos menos freqüentemente caso possuíssemos três. Portanto, em um mundo bidimensional, uma perna deve bastar. Digamos, a direita.

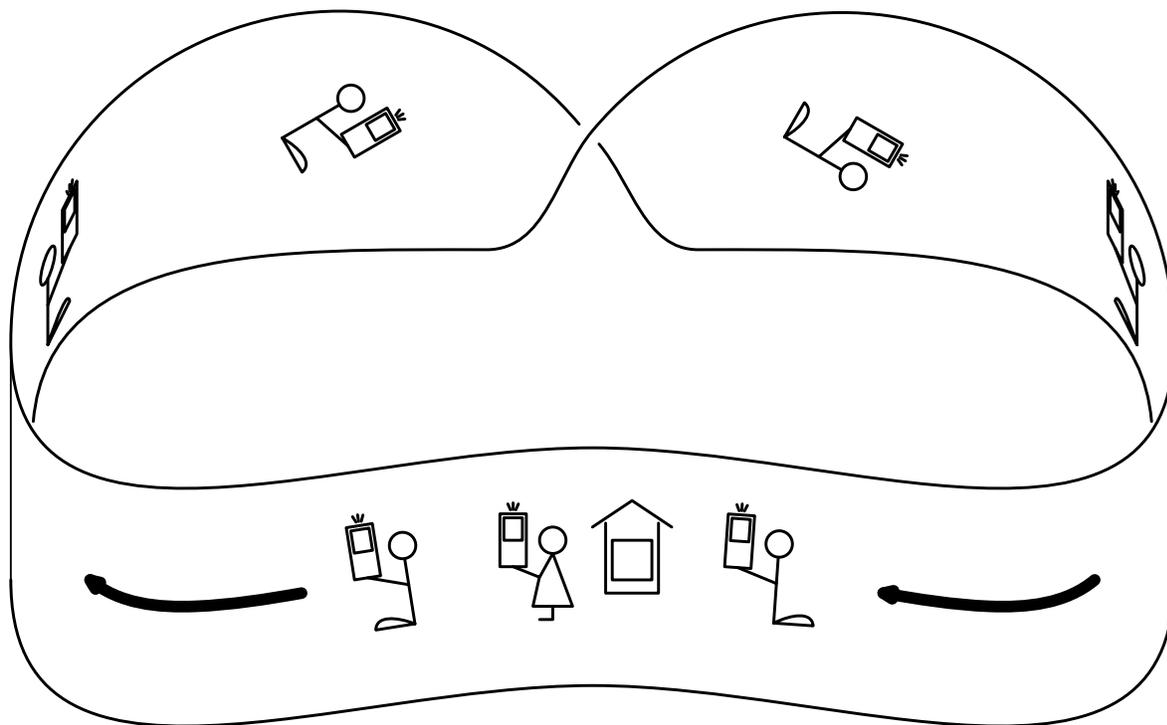
No melhor de todos os possíveis mundos bidimensionais, Cândido, filho de uma mãe amorosa, decidiu realizar uma aventura incrível: dar a volta ao mundo. Temendo os riscos desta empreitada, a mãe deu ao filho um telefone celular sofisticado, capaz de enviar imagens, e pediu-lhe que transmitisse

<sup>1</sup>Acontece que a geometria Euclidiana é degenerada e, de uma certa forma, “separa” estas outras duas.

<sup>2</sup>Era comum para o homem Neolítico caçar mais e mais esposas, não se lembrando de quantas já havia em sua caverna. O surgimento da monogamia como uma solução para este problema ilustra a dificuldade com a aritmética naqueles tempos.

<sup>3</sup>Por acreditar no evolucionismo e em suas vertentes mais modernas, o Carlos não compartilha desta visão. Ainda assim, ele se surpreende por ter dificuldades com a combinatória, dado seu passado microbiológico.

continuamente um vídeo da jornada. Quando a viagem terminou, que infortúnio! Uma criatura de perna esquerda retornou ao doce lar!



- Onde está meu filho tão amado? — perguntou a mãe em desespero.
- E mais importante ... agora, onde diabos vou comprar-lhe os sapatos?

Obviamente, a última questão é meramente alfandegária e pode ser resolvida por um sistema adequado de importação/exportação. Mais interessante seria a seguinte

**1.2. Questão.** Em que momento Cândido trocou de perna?

**1.3. Cogito, ergo sum.** As coordenadas cartesianas foram nomeadas em homenagem ao matemático francês René Descartes. Ao que parece, entretanto, não é Descartes quem deve ser o acusado por disseminar o uso de coordenadas na ciência. Mais provavelmente, o culpado é Gottfried Leibniz, um dos pais do Cálculo. Possivelmente, foi também Leibniz quem atribuiu o nome “coordenadas cartesianas”.

Ninguém vê coordenadas na Natureza. Também não há direções preferenciais. (Cuidado ao aplicar estas ideias no trânsito.) Embora aparentemente triviais, tais observações têm consequências razoavelmente profundas. A conservação do momento linear, por exemplo: já que não há uma direção preferencial, uma partícula em repouso (com respeito a um determinado referencial inercial) não pode mover-se espontaneamente. Na verdade, grande parte das leis de conservação na física tem origem similar a esta.<sup>4</sup>

A escolha de coordenadas ao lidar-se com um dado problema consititui freqüentemente um exemplo típico de *escolha arbitrária*. Não é difícil perceber que uma escolha arbitrária adiciona complexidade extra ao problema. Ainda pior, uma tal escolha é um obstáculo ao entendimento, muitas vezes esconde aspectos sutis do problema e obscurece a essência do assunto em questão.

Sempre que formos capazes, evitaremos escolhas arbitrárias (de qualquer natureza). Quando um objeto é essencialmente ligado a uma escolha arbitrária, dizemos que tal objeto “não existe”.

<sup>4</sup>Um versão rigorosa desta afirmação envolve o estudo das simetrias de equações diferenciais e das leis de conservação associadas. Uma tal teoria foi descoberta por Emmy Noether, matemática nascida na cidade de Erlangen.

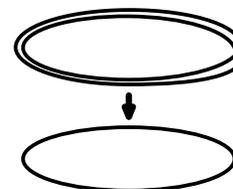
**1.4. Guia para o leitor.** No que se segue, espera-se que o leitor resolva todos os exercícios ou que, saltando alguns destes, aceite os resultados correspondentes. Nós deixamos muitas dicas ao longo do texto. Há também a seção intitulada “Dicas” bem no fim. Sinta-se o leitor bem-vindo para utilizá-la de vez em quando — após resolver um exercício, a correspondente dica deve, em todo caso, ser consultada. Ao longo da exposição, utilizamos os exercícios como se tivessem sido resolvidos.

Algumas subseções do livro são mais avançadas e, em princípio, podem não ser exatamente “para a graduação”. Acreditamos que as dificuldades que um aluno de graduação possa porventura enfrentar em tais subseções sejam mais de natureza psicológica do que causadas por uma falta de pré-requisitos. Seja como for, as subseções mais “avançadas” encontram-se marcadas com um **A**; saltá-las não deve comprometer a parte direcionada aos alunos de graduação.

O livro termina com apêndices. Eles ou contêm material simples e bem conhecido (às vezes, em uma nova exposição) utilizado no livro ou são marcados com um **A**. A única característica em comum entre tais apêndices é serem bem inflamados.

## 2. Espaços projetivos e seus parentes

No plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$ , fixemos um ponto  $f$  e consideremos todas as retas que passam por  $f$ . Tais retas constituem pontos no espaço  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  chamado *reta projetiva real*. Intuitivamente,  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  é unidimensional. Para visualizar este espaço, escolha uma circunferência  $S^1 \subset \mathbb{E}^2$  centrada em  $f$ . A circunferência “lista” todas as retas passando por  $f$ : cada ponto  $p$  na circunferência gera a reta ligando  $p$  e  $f$ . Obviamente, cada reta (isto é, cada ponto em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ ) é listada exatamente duas vezes, por um par de pontos diametricamente opostos na circunferência. Podemos, portanto, visualizar a reta projetiva real como sendo uma circunferência “dobrada”. Entendemos desta forma que a própria reta projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  é uma circunferência. A circunferência  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  pode ser também obtida a partir de qualquer semi-circunferência contida em  $S^1$ , bastando para tal colar os fins da semi-circunferência.



Há outra maneira de visualizar  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . Escolhemos arbitrariamente um ponto em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  e o denotamos por  $\infty$ . Este ponto corresponde a uma reta  $R_0$  que passa por  $f$ ,  $f \in R_0 \subset \mathbb{E}^2$ . Escolhemos uma reta  $T \not\parallel f$ , paralela a  $R_0$ , que não passa por  $f$ . À reta  $T$  chamamos *tela*. Cada ponto  $r \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  (ou seja, cada reta  $R$ ,  $f \in R \subset \mathbb{E}^2$ ), à exceção de  $\infty$ , é exibido na tela como o ponto de interseção  $R \cap T$ . Deste modo, a reta projetiva real é uma reta usual com um ponto adicional:  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{E}^1 \sqcup \{\infty\}$ , onde  $\mathbb{E}^1 = T$ . Enfatizamos novamente que, *a priori*, qualquer ponto em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  pode fazer o papel de  $\infty$ .

**2.1. Problema.** Seja  $R$  uma reta no plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$  e seja  $p$  um ponto tal que  $R \not\parallel p \in \mathbb{E}^2$ . Será que é possível, utilizando somente uma régua, construir a reta  $R'$  passando por  $p$  e paralela a  $R$ ?

Para resolver o Problema 2.1, necessitamos analisar o conceito de “paralelismo” e descobrir um “novo” objeto matemático.

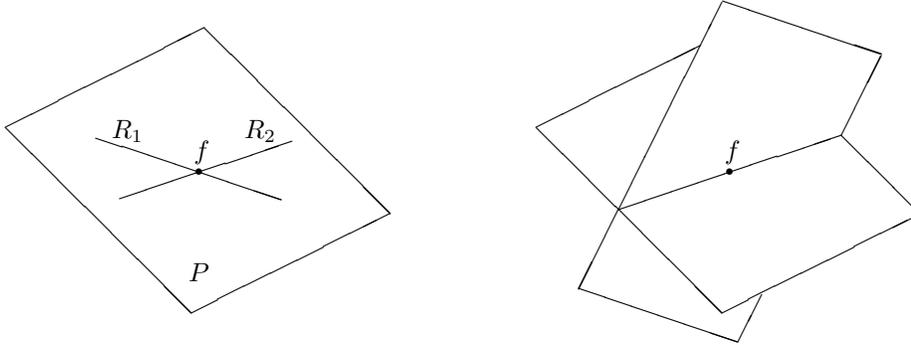
No plano Euclidiano, duas retas distintas quase sempre se interceptam em um ponto. A única exceção ocorre quando as retas são paralelas. Seria bom<sup>5</sup> se a regra pudesse não admitir exceções . . .

Por analogia com a reta projetiva real, construiremos o plano projetivo real. No espaço Euclidiano 3-dimensional  $\mathbb{E}^3$ , fixemos um ponto  $f$  (a fonte de luz). O *plano projetivo real* é o conjunto  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  de todas as retas passando por  $f$ .

**2.2. Definição.** Seja  $f \in P \subset \mathbb{E}^3$  um plano em  $\mathbb{E}^3$  passando por  $f$ . O conjunto  $\{R \mid f \in R \subset P\}$  de todas as retas  $R$  em  $P$  passando por  $f$  é dito uma *reta* em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  (*relativa a P*). Claramente, este conjunto é uma espécie de reta projetiva real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .

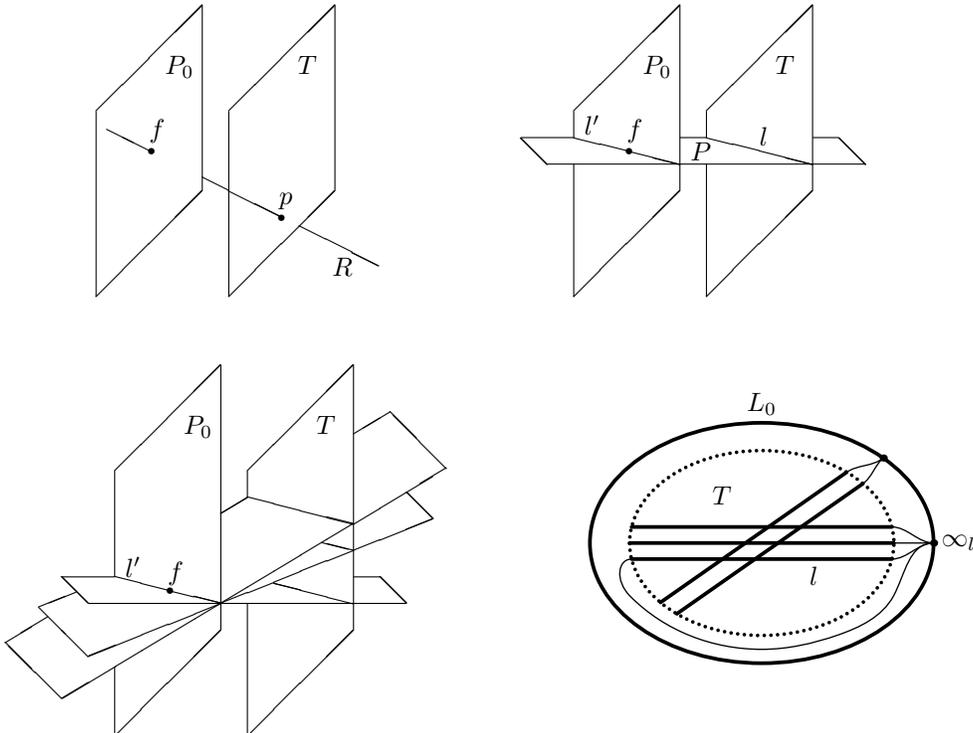
<sup>5</sup>Cícero diria *exceptio probat regulam in casibus non exceptis*, o que, matematicamente, lê-se como “um par de contra-exemplos pode substituir a prova de um teorema”. De acordo com Ivan Karamazov (“Os irmãos Karamazov”, de Fyodor Dostoyevsky) “. . . eles até ousam dizer que duas retas paralelas . . . podem encontrar-se em algum lugar no infinito . . . mesmo se retas paralelas encontrarem-se, e eu próprio veja isto, verei e direi que elas se encontraram, mas, ainda assim, não aceitarei”.

Dados dois pontos distintos  $r_1, r_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ,  $r_1 \neq r_2$ , denotamos por  $R_1, R_2 \subset \mathbb{E}^3$  as correspondentes retas em  $\mathbb{E}^3$ . Logo, existe uma única reta em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  que “liga”  $r_1$  e  $r_2$ : o plano  $P$  relativo à reta em questão é aquele determinado por  $R_1, R_2 \subset P$ . Duas retas distintas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  interceptam-se em um único ponto uma vez que a interseção de dois planos distintos que contêm  $f$  é uma reta em  $\mathbb{E}^3$  passando por  $f$ .



Em seguida, mostraremos que o plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$  pode ser visto como parte do plano projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  de um modo tal que as retas em ambos os planos sejam as “mesmas”.

De fato, seja  $f \notin T \subset \mathbb{E}^3$  um plano que não passa por  $f$ . Interpretando  $f$  como uma fonte de luz e  $T$  como uma tela, podemos identificar quase todo ponto  $r \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  com sua imagem  $p$  na tela, isto é, com a interseção  $T \cap R = \{p\}$  da tela  $T$  com a reta correspondente  $R \subset \mathbb{E}^3$ . Quais pontos não possuem imagem na tela? Denotando por  $P_0$  o plano que passa por  $f$  e é paralelo à tela  $T$ ,  $f \in P_0 \subset \mathbb{E}^3$ , podemos ver que os pontos que não possuem imagem na tela formam a reta  $L_0 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  relativa a  $P_0$ . Deste modo, podemos ver que  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{E}^2 \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , onde  $\mathbb{E}^2 = T$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 = L_0$ .



Seja  $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  a reta em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  distinta de  $L_0$  e seja  $P$  o plano relativo a  $L$ . Assim,  $P$  não é paralelo a  $T$ . Portanto, a reta  $l = T \cap P$  no plano  $T$  é a imagem da reta  $L$  em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Nos termos acima, temos

$L = l \sqcup \{\infty_l\}$ , onde o ponto  $\infty_l \in L_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  corresponde à reta  $l' = P_0 \cap P \subset \mathbb{E}^3$ . Deste modo, obtemos uma correspondência biunívoca entre as retas em  $T$  e as retas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  distintas de  $L_0$ . Cada reta  $l \subset T$  se estende em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  por seu ponto no infinito  $\infty_l \in L_0$ . A reta  $L_0 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  é formada por todos os pontos no infinito das retas em  $T$ .

É fácil ver que duas retas são paralelas em  $T$  se e só se os seus pontos no infinito são os mesmos. Em outras palavras, cada família de retas paralelas em  $T$  é formada pelas retas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  que passam por um mesmo ponto em  $L_0$ . Logo, a reta no infinito  $L_0$  pode ser vista como uma lista de tais famílias.

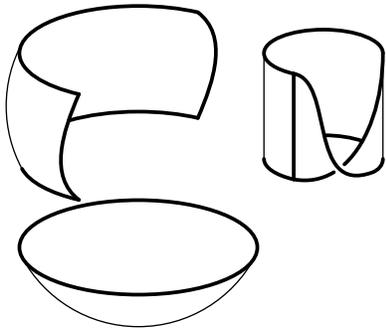
Movendo ao longo de uma reta  $l \subset T$ , independentemente do sentido escolhido, nós finalmente chegamos ao ponto no infinito  $\infty_l \in L_0$ . Chegaremos a um mesmo ponto  $\infty_l$  se movermo-nos ao longo de uma reta paralela a  $l$  e a um ponto diferente se movermo-nos ao longo de uma reta não paralela a  $l$ .

A seguinte observação é fácil, mas muito importante: *Qualquer reta em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  pode ser tomada como a reta no infinito*. Isto resolve o Problema 2.1 imediatamente! De fato, considere o plano  $\mathbb{E}^2$  como pertencendo ao plano projetivo real  $\mathbb{E}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  e utilize uma régua mais poderosa, que permita traçar, no plano projetivo, a reta passando por quaisquer dois pontos distintos. Vamos assumir que seja possível construir a reta paralela  $R'$ . Então, podemos construir a interseção no infinito  $\{q\} = R \cap R'$ . Seja  $Q$  o conjunto finito,  $p, q \in Q$ , de todos os pontos que subsequenteiramente aparecem durante a construção. Tais pontos são pontos de interseção de retas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  que já foram construídas em estágios anteriores mais um número finito de pontos arbitrariamente escolhidos (que podem ou não pertencer às retas que já foram construídas). Escolhemos uma nova reta no infinito  $L'_0$  de modo que  $L'_0$  não passe por nenhum ponto em  $Q$ . Tomamos  $\mathbb{E}'^2 := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L'_0$  como sendo um novo plano (usual). Agora, a construção neste novo plano  $\mathbb{E}'^2$  deve providenciar a mesma reta  $R'$ , a qual, por outro lado, não é paralela a  $R$  já que  $\{q\} = R \cap R' \subset \mathbb{E}'^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \setminus L'_0$ . Uma contradição.

Utilizando a régua mais poderosa, é fácil resolver o seguinte

**2.3. Exercício.** Sejam  $R_1, R_2$  retas paralelas distintas no plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$  e seja  $p \notin R_1, R_2$  um ponto,  $R_1, R_2 \not\ni p \in \mathbb{E}^2$ . Será que é possível, utilizando somente uma régua, construir a reta  $R$  passando por  $p$  e paralela a  $R_1, R_2$  ?

Agora, tentemos visualizar o plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Toda esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$  centrada em  $f$  lista os pontos em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ : cada ponto em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  é listado duas vezes, por um par de pontos diametricamente opostos na esfera. Mas isto não dá a mínima ideia sobre o espaço  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ . Para entender melhor a *topologia* do plano projetivo real, inicialmente cortamos  $\mathbb{S}^2$  em quatro partes e desconsideramos duas partes redundantes.



Realizando as identificações necessárias em uma das duas partes restantes, obtemos uma *fitas de Möbius*. Resta identificar o disco e a fita de Möbius ao longo de seus bordos, que são circunferências. Assim, a estrutura do espaço  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  torna-se mais ou menos clara. Infelizmente, é impossível realizar uma tal colagem dentro de  $\mathbb{E}^3$ .

**2.4. Exercício.** Toda reta divide o plano  $\mathbb{E}^2$  em duas partes. Em quantas partes 4 retas genéricas em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  dividem o plano projetivo real?

**2.5. Exercício.** Visualize o espaço formado por todos os pares não-ordenados de pontos na circunferência.

**2.6. Espaço projetivo.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita, onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Definimos o *espaço projetivo*  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V := V \cdot / \mathbb{K} \cdot$ , onde  $V \cdot := V \setminus \{0\}$  é o espaço linear  $V$  “perfurado” na origem,  $\mathbb{K} \cdot$  é (o grupo de) todos os elementos não-nulos em  $\mathbb{K}$  e  $V \cdot / \mathbb{K} \cdot$  é o *quociente* da *ação* de  $\mathbb{K} \cdot$  em  $V \cdot$ . Isto significa que  $V \cdot / \mathbb{K} \cdot$  é o conjunto das classes de equivalência em  $V \cdot$  dadas pela proporcionalidade com coeficientes em  $\mathbb{K} \cdot$ . (Também denotamos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  se  $\dim_{\mathbb{K}} V = n + 1$ .) Temos a aplicação quociente  $\pi : V \cdot \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  que manda cada elemento para a sua classe. No que se segue, freqüentemente

utilizamos elementos em  $V$  para denotar elementos no espaço projetivo, ou seja, escrevemos  $p$  no lugar de  $\pi(p)$ . Em tais casos, pressupõe-se que o leitor verificará que nossas considerações não se alteram se reescolhermos representantes em  $V$  de pontos no espaço projetivo. Mais uma convenção. Dado um subconjunto  $S \subset V$ , denotamos por  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S := \pi(S \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  a imagem de  $S \subset V$  pela aplicação quociente  $\pi : V \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ . Deste modo, para todo subespaço  $\mathbb{K}$ -linear  $K \leq V$ , podemos considerar o espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}K$  como um subespaço (linear) em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ .

Seja  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  um funcional linear não-nulo. Definimos  $T := \{v \in V \mid fv = 1\}$  e  $K := \ker f$ . Temos uma identificação  $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{K}}K) \simeq T$  dada pela regra  $v \mapsto \frac{v}{fv}$ . Como acima, chegamos à decomposição

$\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \sqcup \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ , onde a tela  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := T$  é um espaço  $\mathbb{K}$ -afim (= um espaço  $\mathbb{K}$ -linear que esqueceu sua origem) de dimensão  $n$ . Em termos de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ , podemos descrever  $T$  como  $\{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid fp \neq 0\}$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}K$  como  $\{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid fp = 0\}$ . (Na expressão  $fp$ , o ponto  $p$  deve ser considerado como  $p \in V$ , mas note que a igualdade  $fp = 0$  e a desigualdade  $fp \neq 0$  não mudam os seus significados se reescolhermos o representante do ponto. — Este é um exemplo do uso, mencionado acima, de elementos em  $V$  para denotar pontos do espaço projetivo.)

Sejam  $x_0, x_1, \dots, x_n : V \rightarrow \mathbb{K}$  coordenadas lineares em  $V$ . Podemos definir *coordenadas projetivas*  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$  em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  assumindo que  $[kx_0, kx_1, \dots, kx_n] = [x_0, x_1, \dots, x_n]$  para todo  $k \in \mathbb{K}^\bullet$ . Assim, considerar separadamente cada coordenada projetiva não fornece nenhum número com significado (mas faz sentido dizer se uma coordenada é nula ou não). Entretanto, quando consideradas coletivamente, as coordenadas projetivas são uma mera proporção.

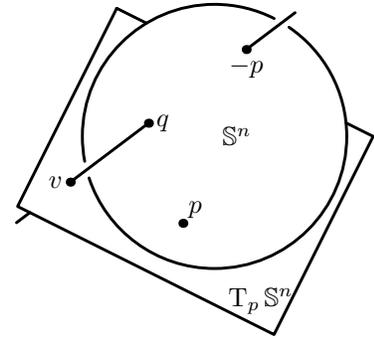
Tomando  $n + 1$  telas,  $U_i := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid x_i p \neq 0\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , temos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \bigcup_{i=0}^n U_i$ . Cada  $U_i$  tem  $n$  coordenadas afins  $y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$  definidas pela regra  $y_j := x_j/x_i$ . A interseção  $U_i \cap U_k$  é descrita como  $U_{ik} := \{p \in U_i \mid y_k(p) \neq 0\}$  em termos das coordenadas  $y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$  em  $U_i$ . A mesma interseção é descrita como  $U_{ki} = \{p \in U_k \mid z_i(p) \neq 0\}$  em termos das coordenadas  $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n$  em  $U_k$ . Logo,  $U_{ik}$  é identificado com  $U_{ki}$  por meio da aplicação

$$U_{ik} \rightarrow U_{ki}, \quad (y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{y_0}{y_k}, \frac{y_1}{y_k}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_k}, \frac{1}{y_k}, \frac{y_{i+1}}{y_k}, \dots, \frac{y_{k-1}}{y_k}, \frac{y_{k+1}}{y_k}, \dots, \frac{y_n}{y_k} \right).$$

Deste modo, podemos interpretar  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$  como uma colagem de  $n + 1$  cópias de  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  identificadas pelas aplicações acima.

Por exemplo, o espaço  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  pode ser visto como a colagem de duas cópias de  $\mathbb{C}$ , munidas das coordenadas  $x_i$ ,  $i = 0, 1$ , de modo que a identificação entre  $U_1 \supset U_{10} \simeq \mathbb{C}^\bullet$  e  $U_0 \supset U_{01} \simeq \mathbb{C}^\bullet$  é dada pela fórmula  $x_0 x_1 = 1$ . Em particular, visualizamos  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  como  $\{[1, x_1] \mid x_1 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$  estendido pelo ponto no infinito  $\infty = [0, 1]$ .

**2.7. Esfera e projeção estereográfica.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{R}$ -linear,  $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$ . Definimos a *n-esfera* como sendo  $\mathbb{S}^n := V/\mathbb{R}^+$ , onde  $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ . Uma definição mais comum da *n-esfera unitária* dentro do espaço Euclidiano é  $\mathbb{S}^n := \{p \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = 1\}$ , onde  $\langle -, - \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Definimos o *espaço tangente*  $T_p \mathbb{S}^n$  a  $\mathbb{S}^n$  em  $p \in \mathbb{S}^n$  como  $T_p \mathbb{S}^n := p^\perp \leq \mathbb{E}^{n+1}$ . Para obter um hiperplano que seja de fato tangente à esfera em  $p$ , é melhor tomar  $p + p^\perp$  ao invés de  $p^\perp$ , mas nós preferimos a definição acima já que ela providencia um óbvio espaço linear. A *projeção estereográfica*  $\varsigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \rightarrow T_p \mathbb{S}^n$  manda o ponto  $q \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$  para a interseção  $T_p \mathbb{S}^n \cap R(-p, q)$ , onde  $R(-p, q)$  denota a reta ligando  $-p$  e  $q$ .

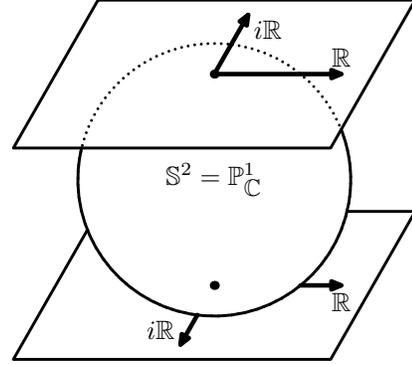


Quando  $n = 2$ , podemos interpretar a projeção estereográfica como “desembrulhar” a esfera perfurada no ponto  $-p$  até o plano tangente à esfera no ponto  $p$ . Este “desembrulhamento” é uma das típicas maneiras de exibir mapas geográficos.

**2.8. Exercício.** Prove as fórmulas explícitas

$$\zeta_p : \mathbb{S}^n \setminus \{-p\} \ni q \mapsto \frac{q+p}{1+\langle q,p \rangle} - p \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \zeta_p^{-1} : T_p \mathbb{S}^n \ni v \mapsto \frac{2(v+p)}{1+\langle v,v \rangle} - p \in \mathbb{S}^n \setminus \{-p\}.$$

**2.9. Esfera de Riemann.** Utilizando um par de projeções estereográficas, podemos ver que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ . De fato, tratemos os planos tangentes  $T_p \mathbb{S}^2$  e  $T_{-p} \mathbb{S}^2$  à esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  nos pontos diametricamente opostos  $p, -p \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$  como sendo planos de números complexos,  $T_p \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}_0$  e  $T_{-p} \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}_1$ , de tal modo que os eixos reais sejam paralelos e de mesmo sentido e os eixos imaginários sejam paralelos e de sentidos opostos. (Para facilitar a visualização, desenhamos os planos tangentes como se passassem pelos pontos,  $p \in T_p \mathbb{S}^2$  e  $-p \in T_{-p} \mathbb{S}^2$ .) Seja  $0 \neq x \in \mathbb{C}_0 \simeq T_p \mathbb{S}^2 = p^\perp$ . Aplicando as fórmulas do Exercício 2.8, obtemos  $\zeta_{-p} \zeta_p^{-1} x = x/\langle x, x \rangle = 1/\bar{x}$ , que corresponde a  $1/x \in \mathbb{C}_1 \simeq T_{-p} \mathbb{S}^2$ . Em outras palavras, a colagem dos planos  $T_p \mathbb{S}^2$  e  $T_{-p} \mathbb{S}^2$  resultando em  $\mathbb{S}^2$  é a mesma colagem, descrita acima, de  $U_0$  e  $U_1$  resultando em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .



**2.10. Exercício.** Prove que a projeção estereográfica  $\zeta_p$  estabelece uma correspondência biunívoca entre subesferas em  $\mathbb{S}^n$  (= interseções de  $\mathbb{S}^n$  com subespaços afins em  $\mathbb{E}^{n+1}$ ) e subesferas ou subespaços afins em  $T_p \mathbb{S}^n$ .

**2.11. Exercício.** Prove que a projeção estereográfica preserva ângulos entre curvas.

**2.12A. Grassmannianas.** Tomemos e fixemos espaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $P, V$  e denotemos por

$$M := \{p \in \text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V) \mid \ker p = 0\}$$

o conjunto aberto de todos os monomorfismos no espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$ . O grupo  $\text{GL}_{\mathbb{K}} P$  de todas as transformações  $\mathbb{K}$ -lineares não-degeneradas de  $P$  age à direita em  $\text{Lin}_{\mathbb{K}}(P, V)$  e em  $M$ . Por definição, a *grassmanniana*  $\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$  é o espaço quociente

$$\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V) := M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P, \quad \pi : M \rightarrow M/\text{GL}_{\mathbb{K}} P,$$

onde  $k := \dim_{\mathbb{K}} P$ . Ela é o espaço de todos os subespaços  $\mathbb{K}$ -lineares  $k$ -dimensionais em  $V$ . No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , podemos também tomar o grupo  $\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P := \{g \in \text{GL}_{\mathbb{R}} P \mid \det g > 0\}$  no lugar de  $\text{GL}_{\mathbb{K}} P$ , obtendo a *grassmanniana*

$$\text{Gr}_{\mathbb{R}}^+(k, V) := M/\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P, \quad \pi' : M \rightarrow M/\text{GL}_{\mathbb{R}}^+ P$$

de subespaços  $\mathbb{R}$ -lineares  $k$ -dimensionais *orientados* em  $V$ .

### 3. Espaços suaves e funções suaves

Por que sentimos que a 2-esfera é suave e que a (superfície de um 3-) cubo não o é? Parece que o conceito de função suave responde bem esta pergunta. Todo mundo sabe, pelo menos em um nível intuitivo, o que uma função suave é.<sup>6</sup> Na verdade, ao invés de qualquer tipo de definição formal, parece melhor simplesmente listar as propriedades de funções (suaves) que iremos utilizar. Inevitavelmente, vamos simultaneamente introduzir as propriedades de espaços (suaves).

Nesta seção, tentaremos nos focar em entender e clarear a natureza de objetos e conceitos. Assim, aconteceu que nossa introdução à topologia diferencial saiu um pouquinho não-padrão, mas isto será recompensado: a mesma exposição funciona para a geometria algébrica/complexa. O leitor fica convidado a voltar a este material no futuro e lançar-lhe um olhar mais amplo; no entanto, em uma primeira leitura, pode-se optar por seguir a exposição sempre com os espaços e funções suaves usuais em mente.

**3.1. Observações introdutórias.** Fixemos um corpo  $\mathbb{K}$ . Em nossas aplicações, este será o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais ou o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos. Gostaríamos de falar de funções locais “suaves” com valores em  $\mathbb{K}$ ,  $M \circ \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , definidas em subconjuntos abertos  $U \subset \circ M$  de um dado espaço topológico  $M$ . Denote por  $\mathcal{F}$  todas tais funções e, por  $\mathcal{F}(U)$ , aquelas com um dado  $U \subset \circ M$ . Podemos somar e multiplicar as funções em  $\mathcal{F}(U)$ . Naturalmente, as funções constantes devem ser incluídas em  $\mathcal{F}(U)$ . Em outras palavras,  $\mathcal{F}(U)$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra comutativa. Uma característica mais importante de funções “suaves” é que tal conceito é **local**. Isto significa que, para  $W \subset \circ U \subset \circ M$  e  $f \in \mathcal{F}(U)$ , a restrição  $f|_W : W \rightarrow \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(W)$  e *vice versa*: se uma função é localmente “suave”, ela deve ser “suave”. Assim, chegamos à seguinte definição.

**3.2. Feixes de funções.** Seja  $M$  um espaço topológico e seja  $\mathcal{F} := \bigsqcup_{U \subset \circ M} \mathcal{F}(U)$  uma coleção de funções com valores em  $\mathbb{K}$  tais que  $\mathcal{F}(U)$  é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra para todo  $U \subset \circ M$  e as seguintes condições valem.

- Se  $W \subset \circ U \subset \circ M$  e  $f \in \mathcal{F}(U)$ , então  $f|_W \in \mathcal{F}(W)$ .
- Sejam dados subconjuntos abertos  $U_i \subset \circ M$ ,  $i \in I$ , e uma função  $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , onde  $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ . Se  $f|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$  para todo  $i \in I$ , então  $f \in \mathcal{F}(U)$ .

Então  $\mathcal{F}$  é um *feixe* de funções em  $M$  com valores em  $\mathbb{K}$ .

Falando de modo ligeiramente informal, um feixe de funções corresponde a uma propriedade local de uma função com valores em  $\mathbb{K}$  preservada pelas operações da  $\mathbb{K}$ -álgebra.

Seja  $p \in M$  fixado, sejam  $p \in U_1, U_2 \subset \circ M$  e seja  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Escrevemos  $f_1 \sim f_2$  se existe  $U \subset \circ U_1 \cap U_2$  tal que  $p \in U$  e  $f_1|_U = f_2|_U$ . Obviamente,  $\sim$  é uma relação de equivalência. A correspondente classe de equivalência  $f_p$  é o *germe* de  $f \in \mathcal{F}$  em  $p$ . Todos os germes em  $p$  formam o *stalk*  $\mathcal{F}_p$  de  $\mathcal{F}$  em  $p$ . O stalk é uma  $\mathbb{K}$ -álgebra e, para  $p \in U \subset \circ M$ , temos o homomorfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_p$ ,  $f \mapsto f_p$ , que é compatível com restrições.

A  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{F}_p$  decompõe-se em  $\mathbb{K}$  (as constantes) e no ideal  $\mathfrak{m}_p := \{f_p \mid f(p) = 0\} \triangleleft \mathcal{F}_p$  formado pelos germes que se anulam em  $p$ . Logo,  $\mathcal{F}_p = \mathbb{K} + \mathfrak{m}_p$ .

**3.3. Exemplo básico.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita munido da topologia usual. Sejam  $p \in U \subset \circ V$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  e  $v \in V$  um ponto, uma função e um vetor. Denotamos por

$$v_p f := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(p + \varepsilon v) - f(p)}{\varepsilon}$$

<sup>6</sup>A seguinte estória sobre o “primo de Grothendieck” (Alexander Grothendieck, um dos maiores matemáticos de nossos tempos) vem à mente. Alguém sugeriu: “Tome um número primo.” Grothendieck respondeu: “Você quer dizer, tipo 57?”

$$\begin{array}{ccc}
 M \circ \supset U \circ \supset W \ni p & & \\
 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\quad} \mathcal{F}(W) & & \\
 \searrow \quad \swarrow & \text{||}_W & \\
 & \mathcal{F}_p &
 \end{array}$$

a derivada  $v$ -direcional de  $f$  em  $p$ . Se  $f := \varphi|_U$ , onde  $\varphi \in V^* := \text{Lin}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  é um funcional  $\mathbb{K}$ -linear, então tal derivada existe e é igual a  $v_p f = \varphi v$ . Obviamente,  $v_p c = 0$  para qualquer função constante  $c$ . Se  $v_p f$  existe para todo  $p \in U$ , definimos a derivada parcial  $[v]_U f : U \rightarrow \mathbb{K}$  pela regra  $[v]_U f : p \mapsto v_p f$ . Uma função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  é dita suave de classe  $C^0$ . Por indução, uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  é suave de classe  $C^k$  se e só se a função  $[v]_U f : U \rightarrow \mathbb{K}$  (existe e) é suave de classe  $C^{k-1}$  para todo  $v \in V$ . Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{K}$  é suave (de classe  $C^\infty$ ) se e só se ela é suave de classe  $C^k$  para todo  $k \geq 0$ .

**3.3.1. Exercício.** Sejam  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $p \in U \subset V$  e  $v \in V$  tais que  $v_p f_1, v_p f_2$  existem. Mostre que  $v_p(f_1 + f_2), v_p(f_1 f_2)$  existem e

$$v_p(f_1 + f_2) = v_p f_1 + v_p f_2, \quad v_p(f_1 f_2) = f_1(p)v_p f_2 + f_2(p)v_p f_1.$$

(A última é a bem conhecida regra de Leibniz.) Mostre que  $C^k$ , formado por todas as funções suaves de classe  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$ , é um feixe de funções em  $V$  com valores em  $\mathbb{K}$ . Temos  $C^k(U) \subset C^{k-1}(U)$  e  $[v]_U : C^k(U) \rightarrow C^{k-1}(U)$  para todos  $v \in V$  e  $U \subset V$ . Note que  $[v]_U$  é compatível com restrições. Logo, podemos escrever  $[v]$  ao invés de  $[v]_U$ .

**3.3.2. Exercício.** Se  $v_p f$  existe, então  $(kv)_p f$  existe e  $(kv)_p f = kv_p f$  para todo  $k \in \mathbb{K}$ . Para  $f \in C^1$  e  $v, w \in V$ , temos  $[v + w]f = [v]f + [w]f$ .

**3.3.3. Exercício** (fórmula de Taylor). Sejam  $p \in V$  e  $g \in C_p^\infty$ . Então existem um único funcional linear  $\varphi \in V^*$  e  $h \in \mathfrak{m}_p^2$  tais que  $g = g(p) + \varphi_p - \varphi p + h$ .

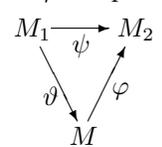
**3.3.4. Exercício.** Mostre que a topologia em  $V$  é a mais fraca tal que todas as funções  $C^\infty(V) \ni f : V \rightarrow \mathbb{K}$  são contínuas.

**3.3.5. Exercício.** Seja  $V \supset U \xrightarrow{\psi} W$  uma aplicação para um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $W$  de dimensão finita. Suponha que  $W^* \circ \psi \subset C^\infty(U)$ . Mostre que  $\psi$  é contínua e que  $f \circ \psi \in C^\infty(\psi^{-1}(X))$  para todos  $X \subset W$  e  $f \in C^\infty(X)$ .

Até o fim desta seção, o leitor pode assumir, por simplicidade, que os feixes com os quais lidamos são todos induzidos pelos feixes  $C^\infty$ .

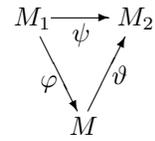
**3.4. Aplicações suaves e estruturas induzidas.** Sejam  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  e  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  espaços com feixes de funções. Uma aplicação contínua  $\psi : M_1 \rightarrow M_2$  é “suave” se  $f_2 \circ \psi \in \mathcal{F}_1(\psi^{-1}(U_2))$  para todos  $U_2 \subset M_2$  e  $f_2 \in \mathcal{F}_2(U_2)$ .

Seja  $(M_2, \mathcal{F}_2)$  um espaço com feixe de funções e seja  $\varphi : M \rightarrow M_2$  uma aplicação. Então existem uma topologia mais fraca e um menor feixe  $\mathcal{F}$  de funções em  $M$  tais que  $\varphi$  é suave. Mais precisamente, os subconjuntos abertos em  $M$  são da forma  $U = \varphi^{-1}(U_2)$ , onde  $U_2 \subset M_2$ . Uma função  $M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se e só se ela é localmente da forma  $f_2 \circ \varphi$ , isto é, se e só se existem uma cobertura aberta  $U_2 = \bigcup_{i \in I} U_i$  e funções  $f_i \in \mathcal{F}_2(U_i)$  tais que  $U = \varphi^{-1}(U_2)$  e  $f|_{\varphi^{-1}(U_i)} = f_i \circ \varphi$  para todo  $i \in I$ . A estrutura introduzida em  $M$  chama-se induzida por  $\varphi$ . Ela é universal no seguinte sentido. Se  $\psi = \varphi \circ \vartheta$  para alguma aplicação  $\vartheta : M_1 \rightarrow M$  e uma aplicação suave  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é suave. O conceito de estrutura induzida usualmente aplica-se para subconjuntos  $M \subset M_2$ . Neste caso, o feixe induzido é denotado por  $\mathcal{F}_2|_M$ . No simples (e importante) caso em que  $M \subset M_2$ , temos  $\mathcal{F}_2|_M = \bigsqcup_{U \subset M} \mathcal{F}_2(U)$ .



Seja  $(M_1, \mathcal{F}_1)$  um espaço com feixe de funções e seja  $\varphi : M_1 \rightarrow M$  uma aplicação. Então existem uma topologia mais forte e um maior feixe  $\mathcal{F}$  de funções em  $M$  tais que  $\varphi$  é suave. Mais precisamente,  $U \subset M$  se e só se  $\varphi^{-1}(U) \subset M_1$  e  $M \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$  pertence a  $\mathcal{F}(U)$  se e só se  $f \circ \varphi \in \mathcal{F}_1(\varphi^{-1}(U))$ . A estrutura induzida em  $M$  chama-se o quociente por  $\varphi$ . Ela é universal no seguinte sentido. Se  $\psi = \vartheta \circ \varphi$  para

alguma aplicação  $\vartheta : M \rightarrow M_2$  e uma aplicação suave  $(M_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\psi} (M_2, \mathcal{F}_2)$ , então  $\vartheta$  é suave. O conceito de estrutura quociente usualmente aplica-se ao quociente por uma relação de equivalência  $M_1 \rightarrow M := M_1 / \sim$ .



**3.4.1. Exercício.** Sejam  $(M, \mathcal{F})$  e  $(N, \mathcal{G})$  espaços munidos de feixes de funções, seja  $\psi : M \rightarrow N$  uma aplicação e sejam  $N = \bigcup_{i \in I} U_i$  e  $\psi^{-1}(U_i) = \bigcup_{j \in J_i} U_{ij}$ ,  $i \in I$ , coberturas abertas. Mostre que  $\psi$  é suave se e só se todas  $\psi|_{U_{ij}} : U_{ij} \rightarrow U_i$  são suaves, onde  $U_i$  e  $U_{ij}$  são munidos das estruturas induzidas. Em outras palavras, o conceito de aplicação suave é local.

**3.4.2. Exercício.** Seja  $M$  um conjunto e suponha que  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ , onde cada  $M_i$  é munido de uma topologia e de um feixe  $\mathcal{F}_i$  de funções com valores em  $\mathbb{K}$  de modo que  $M_i \cap M_j \subset \circ M_i$  e  $\mathcal{F}_i|_{M_i \cap M_j} = \mathcal{F}_j|_{M_i \cap M_j}$  para todos  $i, j \in I$ . Verifique que existem única topologia e feixe  $\mathcal{F}$  em  $M$  tais que  $M_i \subset \circ M$  e a estrutura em  $M_i$  é induzida por aquela em  $M$  para todo  $i \in I$ . Nesta situação, dizemos que  $(M, \mathcal{F})$  é uma *colagem* de  $(M_i, \mathcal{F}_i)$ ,  $i \in I$ . Nós já vimos alguns exemplos de colagem nas Subseções 2.6 e 2.9.

**3.4.3. Exemplo.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{R}$ -linear de dimensão  $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$ . Então  $V^\bullet := V \setminus \{0\} \subset \circ V$  está munido da  $C^\infty$ -estrutura induzida. Se  $v_2 = r v_1$  para algum  $r > 0$ , escrevemos  $v_1 \sim v_2$ . Assim obtemos a estrutura quociente na  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n := V^\bullet / \sim$  bem como a aplicação suave  $\pi : V^\bullet \rightarrow \mathbb{S}^n$ .

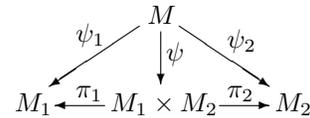
**3.4.4A. Exemplo.** Mais geralmente, as grassmannianas  $\pi : M \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$  e  $\pi' : M \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{R}}^+(k, V)$  (vide 2.12A) são munidas da estrutura quociente.

**3.4.5. Exemplo.** Seja  $V$  um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}$ -linear com  $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$ . Então  $S := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 1\} \subset V$  é fechado. Temos a  $C^\infty$ -estrutura induzida em  $S \subset V^\bullet$ .

**3.4.6. Exercício.** Mostre que a composição  $S \hookrightarrow V^\bullet \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^n$  (vide Exemplos 3.4.3 e 3.4.5) é um difeomorfismo (isto é, um isomorfismo suave).

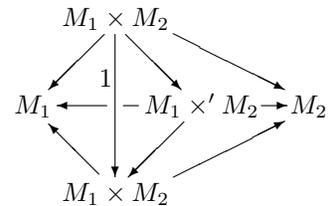
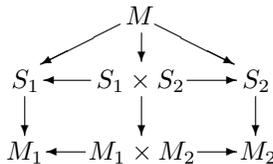
**3.5. Produto e produto fibrado.** Fixemos uma certa classe  $\mathcal{C}$  de espaços com feixes de funções com valores em  $\mathbb{K}$  e assumamos que  $\mathcal{C}$  é fechado relativamente a tomar-se subespaços abertos (munidos da estrutura induzida) e relativamente à colagem. Assim, para uma colagem  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ , temos  $M_i \in \mathcal{C}$  para todo  $i \in I$  se e só se  $M \in \mathcal{C}$  (na realidade, necessitaremos apenas das colagens onde  $I$  é enumerável ou finito). Em outras palavras, a propriedade “pertencer a  $\mathcal{C}$ ” é local.

**3.5.1. Produto.** Sejam  $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ . Uma estrutura em  $M_1 \times M_2$  tal que  $M_1 \times M_2 \in \mathcal{C}$  é um  *$\mathcal{C}$ -produto* se as projeções  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  são suaves e, para todos  $M \in \mathcal{C}$  e aplicações suaves  $\psi_i : M \rightarrow M_i$ , a aplicação  $\psi : M \rightarrow M_1 \times M_2$  no diagrama comutativo é suave.



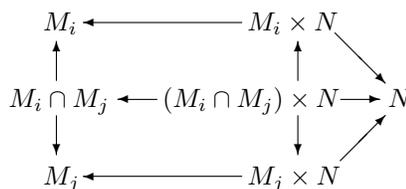
**3.5.2. Exercício.** Sejam  $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ . Mostre que uma estrutura de  $\mathcal{C}$ -produto em  $M_1 \times M_2$  é única se existir.

**3.5.3. Exercício.** Sejam  $S_1, S_2, S_1 \times S_2, M_1, M_2, M_1 \times M_2 \in \mathcal{C}$ , onde  $S_i \subset M_i$ ,  $i = 1, 2$ , e  $S_1 \times S_2 \subset M_1 \times M_2$  estão munidos das estruturas induzidas e  $M_1 \times M_2$  é um  $\mathcal{C}$ -produto. Prove que  $S_1 \times S_2$  é um  $\mathcal{C}$ -produto.



**3.5.4. Exercício.** Sejam  $M_i, N_j \in \mathcal{C}$  para todos  $i \in I$  e  $j \in J$ . Sejam

$M = \bigcup_{i \in I} M_i$  e  $N = \bigcup_{j \in J} N_j$  colagens. Suponha que exista uma estrutura de  $\mathcal{C}$ -produto em  $M_i \times N_j$  para todos  $i \in I$  e  $j \in J$ . Mostre que a colagem de  $M_i \times N_j$  providencia uma estrutura de  $\mathcal{C}$ -produto em  $M \times N$ .

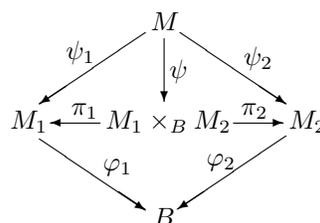


**3.5.5. Produto fibrado.** Sejam  $M_1, M_2, B \in \mathcal{C}$  e sejam  $\varphi_i : M_i \rightarrow B$  aplicações suaves,  $i = 1, 2$ . Definimos

$$M_1 \times_B M_2 := \{(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2 \mid \varphi_1(p_1) = \varphi_2(p_2)\},$$

$$\pi_i : M_1 \times_B M_2 \rightarrow M_i, \quad \pi_i : (p_1, p_2) \mapsto p_i, \quad i = 1, 2.$$

Claramente,  $\varphi_1 \circ \pi_1 = \varphi_2 \circ \pi_2$ . Uma estrutura em  $M_1 \times_B M_2$  tal que  $M_1 \times_B M_2 \in \mathcal{C}$  é um *produto fibrado* em  $\mathcal{C}$  (ou uma  $\mathcal{C}$ -estrutura de *produto fibrado*) se  $\pi_1, \pi_2$  são suaves e, para todos  $M \in \mathcal{C}$  e aplicações suaves  $M_1 \xleftarrow{\psi_1} M \xrightarrow{\psi_2} M_2$  tais que  $\varphi_1 \circ \psi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2$ , a aplicação  $\psi : M \rightarrow M_1 \times_B M_2$  no diagrama comutativo é suave.



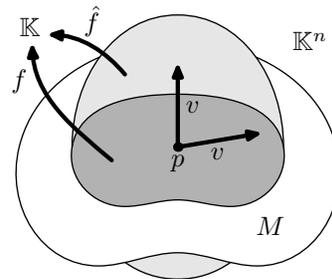
É freqüentemente útil visualizar o produto fibrado  $M_1 \times_B M_2$  como uma família de produtos parametrizada por  $B$ . Mais especificamente,  $M_1 \times_B M_2 = \bigsqcup_{p \in B} \varphi_1^{-1}(p) \times \varphi_2^{-1}(p)$ , onde  $\varphi_1^{-1}(p) \times \varphi_2^{-1}(p)$  é o produto das *fibras* de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sobre  $p \in B$ .

**3.5.6. Exercício.** Sejam  $M_1, M_2, B \in \mathcal{C}$ . Mostre que uma  $\mathcal{C}$ -estrutura de produto fibrado em  $M_1 \times_B M_2$  é única se existir.

**3.5.7. Exercício.** Sejam  $M_1, M_2, B, M_1 \times M_2, M_1 \times_B M_2 \in \mathcal{C}$ , onde  $M_1 \times M_2$  é um  $\mathcal{C}$ -produto e  $M_1 \times_B M_2 \subset M_1 \times M_2$  está munido da estrutura induzida. Prove que  $M_1 \times_B M_2$  é um produto fibrado em  $\mathcal{C}$ .

**3.6. Fibrado tangente.** Necessitamos entender o que é um vetor tangente em um ponto  $p \in M$  a um espaço  $M$  munido de um feixe de funções. Todo mundo parece “saber” o que é um vetor tangente a uma superfície suave  $M \subset \mathbb{K}^3$  e pode até mesmo desenhá-lo no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Ainda assim, há um par de problemas. O primeiro consiste nas palavras “superfície suave” — nós ainda não definimos um subespaço suave e a definição que primeiro vem à mente tende a utilizar o próprio conceito de vetor tangente ... O outro problema é ainda mais pesado. Nossa visão intuitiva de vetor tangente não é de forma alguma intrínseca. Logo, não temos uma ideia clara de como comparar vetores tangentes em um mesmo ponto  $p \in M$  que vêm de diferentes mergulhos suaves  $M \hookrightarrow \mathbb{K}^n$ .

Felizmente, ambos os problemas podem ser solucionados com o mesmo remédio. Para o primeiro, podemos restringir o feixe  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{K}^n$  para  $M$  na esperança de caracterizar a suavidade de  $M$  em termos de  $\mathcal{F}|_M$ . Nosso exemplo básico 3.3 fornece uma dica de como lidar com o segundo problema. Podemos simplesmente interpretar um vetor tangente “intuitivo”  $v$  em  $p \in M$  como sendo uma derivada na direção deste vetor. É verdade que a expressão  $f(p + \varepsilon v)$  não faz sentido em termos do feixe  $\mathcal{F}|_M$ . Entretanto, ela faz sentido para pequenos valores de  $\varepsilon$  porque a função  $f \in \mathcal{F}|_M$  é localmente a restrição de alguma  $\hat{f} \in \mathcal{F}$ . À primeira vista, pode parecer possível definir  $v_p f := v_p \hat{f}$  mesmo para um vetor  $v$  que não é tangente a  $M$  em  $p \in M$ . Mas isto não vai funcionar porque o resultado  $v_p \hat{f}$  dependerá da extensão  $\hat{f}$  de  $f$ . A independência da escolha de  $\hat{f}$  é exatamente a tangência de  $v$  a  $M$  em um ponto suave  $p \in M$ . Deste modo, chegamos à seguinte definição intrínseca.



**3.6.1. Vetores tangentes.** Seja  $M$  um espaço com um feixe  $\mathcal{F}$  de funções com valores em  $\mathbb{K}$  e seja  $p \in M$ . Um funcional  $\mathbb{K}$ -linear  $t : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{K}$  é um *vetor tangente* a  $M$  em  $p$  (em símbolos,  $t \in T_p M$ ) se  $t$  é uma derivação, isto é, se

$$t(g_1 g_2) = g_1(p) t g_2 + g_2(p) t g_1$$

para todos  $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_p$ .

Seja  $p \in U \subset M$ . Então  $(\mathcal{F}|_U)_p = \mathcal{F}_p$ . Portanto, assumindo a estrutura induzida em  $U$ , obtemos a identificação  $T_p U = T_p M$ .

Para  $p \in U \subset M$ ,  $f \in \mathcal{F}(U)$  e  $t \in T_p M$ , definimos  $t f := t f_p$ .

**3.6.2. Exercício.** Seja  $t \in T_p M$ . Mostre que  $t c = 0$  para toda constante  $c \in \mathbb{K} \subset \mathcal{F}_p$  e que  $t(\mathfrak{m}_p^2) = 0$ . Logo,  $t$  define um funcional  $\mathbb{K}$ -linear  $\bar{t} : \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \rightarrow \mathbb{K}$ . Ainda mais, a aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $T_p M \rightarrow (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ ,  $t \mapsto \bar{t}$ , é um isomorfismo. Por definição,  $T_p M$  e  $T_p^* M := \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  são os espaços  $\mathbb{K}$ -lineares *tangente* e *cotangente* a  $M$  em  $p$ .

**3.6.3. Diferencial.** Seja  $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} (N, \mathcal{G})$  uma aplicação suave e seja  $p \in M$ . Temos o homomorfismo  $\mathcal{F}_p \xleftarrow{\psi_p^*} \mathcal{G}_{\psi(p)}$  de  $\mathbb{K}$ -álgebras que é induzido pela composição com  $\psi$ . Assim, obtemos a aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$  chamada a *diferencial* de  $\psi$  em  $p$ . No nível de funções, a diferencial é definida via composição com  $\psi$ , isto é,  $d\psi_p t(f) := t(f \circ \psi)$  para  $f \in \mathcal{G}(U)$ ,  $\psi(p) \in U \subset N$  e  $t \in T_p M$ .

Denotamos por  $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M \xrightarrow{\pi} M$  a união disjunta (munida da óbvia projeção) de todos os espaços tangentes a pontos em  $M$ . Chamamos  $\pi : TM \rightarrow M$  o *fibrado tangente* de  $M$ . Note que a *fibra*  $T_p M$  é nada mais que  $\pi^{-1}(p)$ .

Dada uma aplicação suave  $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} (N, \mathcal{G})$ , obtemos o seguinte diagrama comutativo, onde a diferencial  $d\psi : TM \rightarrow TN$  é igual a  $d\psi_p$  na fibra  $T_p M$ .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\quad} & TN \\ \downarrow \pi_M & \xrightarrow{d\psi} & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

**3.6.4. Exercício.** Mostre que  $T$  e  $d$  providenciam um *functor*, isto é, prove a seguinte *regra da cadeia*. Dadas aplicações suaves  $(L, \mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} (M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} (N, \mathcal{G})$ , a diferencial da composta é a composta das diferenciais:  $d(\psi \circ \varphi) = (d\psi) \circ (d\varphi)$ . (O fato que  $d1_M = 1_{TM}$  parece bastante óbvio.)

Podemos imaginar o espaço tangente  $T_p M$  como sendo a melhor aproximação de primeira ordem de uma vizinhança infinitesimal de  $p \in M$  por um espaço  $\mathbb{K}$ -linear. Logo, a diferencial  $d\psi_p$  é a melhor aproximação de primeira ordem de  $\psi$  sobre tal vizinhança.

**3.6.5. Fibrado tangente de um subespaço.** Seja  $S \subset M$  um subespaço, isto é, um subconjunto munido da estrutura induzida. Denotamos por  $IS$  todas as funções que se anulam em  $S$ . Em detalhes,  $IS(U) := \{f \in \mathcal{F}(U) \mid f(S \cap U) = 0\}$  para todo  $U \subset M$ . Obtemos o feixe de ideais  $IS \triangleleft \mathcal{F}$  no sentido da definição seguinte.

Suponha que, para todo  $U \subset M$ , nos é dado um ideal  $\mathcal{J}(U) \triangleleft \mathcal{F}(U)$ . Dizemos que  $\mathcal{J} := \bigsqcup_{U \subset M} \mathcal{J}(U)$  é um *feixe* de *ideais* em  $\mathcal{F}$  e escrevemos  $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{F}$  quando as seguintes condições valem.

- Se  $W \subset U \subset M$  e  $f \in \mathcal{J}(U)$ , então  $f|_W \in \mathcal{J}(W)$ .
- Sejam-nos dados subconjuntos abertos  $U_i \subset M$ ,  $i \in I$ , e uma função  $U \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ , onde  $U := \bigcup_{i \in I} U_i$ . Se  $f|_{U_i} \in \mathcal{J}(U_i)$  para todo  $i \in I$ , então  $f \in \mathcal{J}(U)$ .

Os germes em  $p \in M$  de funções em  $\mathcal{J}$  formam o *stalk*  $\mathcal{J}_p$  de  $\mathcal{J}$  em  $p$ . Claramente,  $\mathcal{J}_p \triangleleft \mathcal{F}_p$ .

**3.6.6. Exercício.** Seja  $p \in S \subset M$ . Então  $(IS)_p \subset \mathfrak{m}_p$  e  $(\mathcal{F}|_S)_p = \mathcal{F}_p / (IS)_p$ .

**3.6.7. Exercício.** Seja  $p \in S \subset M$ . Mostre que  $T_p S = \{t \in T_p M \mid t(IS)_p = 0\} \leq T_p M$ . Isto significa que a diferencial da inclusão  $i : S \hookrightarrow M$  pode ser interpretada como uma inclusão  $di : TS \hookrightarrow TM$ .

**3.6.8. Equações.** Seja  $(M, \mathcal{F})$  um espaço com feixe de funções com valores em  $\mathbb{K}$ . Pode-se definir um subespaço fechado  $S \subset M$  por meio de equações. Digamos, poderíamos tomar  $E \subset \mathcal{F}(M)$  e colocar  $S := \{p \in M \mid e(p) = 0 \text{ para todo } e \in E\}$ . Infelizmente, há muitos bons espaços com feixes onde uma tal definição não produz nada interessante.<sup>7</sup> A razão é simples — pode acontecer que  $\mathcal{F}(M) = \mathbb{K}$ . Tentemos utilizar funções locais nas equações:

Seja  $E \subset \mathcal{F}$  e denote por  $U_e \subset M$  o domínio de  $e \in E$ ,  $e \in \mathcal{F}(U_e)$ . Definimos o subespaço

$$ZE := \{p \in M \mid e(p) = 0 \text{ para todo } e \in E \text{ tal que } p \in U_e\}$$

dado pelas equações  $E = 0$  e munido da estrutura induzida. Note que, de acordo com esta definição,  $p \in ZE$  se  $p \notin U_e$  para todo  $e \in E$ . Em particular, todo subconjunto fechado é dado por equações. De fato, seja  $U \subset M$  e denotemos por  $1_U \in \mathbb{K} \subset \mathcal{F}(U)$  a constante 1. Então  $M \setminus U = Z1_U$ .

Temos  $ZE = \{p \in M \mid e_p \in \mathfrak{m}_p \text{ para todo } e \in E \text{ tal que } p \in U_e\}$ . Em particular,  $Z\mathcal{J} = \{p \in M \mid \mathcal{J}_p \subset \mathfrak{m}_p\}$  para qualquer feixe de ideais  $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{F}$ .

**3.6.9. Exercício.** Sejam  $S \subset M$  e  $E \subset \mathcal{F}$ . Mostre que os operadores  $Z$  e  $I$  invertem a inclusão. Verifique que  $ZIS \supset S$  e  $IZE \supset E$ . O feixe de ideais  $IZE$  é a saturação de  $E \subset \mathcal{F}$ . Prove que a saturação  $IZE$  define o mesmo subespaço que  $E$ , isto é, prove que  $ZIZ = Z$ . Mostre que  $IS$  é saturado, isto é, que  $ZIZ = I$ .

Para mostrar que (reciprocamente) qualquer conjunto dado por equações é fechado, podemos pedir que o feixe  $\mathcal{F}$  seja local. Um feixe  $\mathcal{F}$  em  $M$  é local se todo  $g \in \mathcal{F}_p \setminus \mathfrak{m}_p$  é inversível em  $\mathcal{F}_p$  para todo  $p \in M$ . Isto significa que existe algum  $g' \in \mathcal{F}_p$  tal que  $gg' = 1$ .

Para todo feixe local  $\mathcal{F}$  e qualquer  $E \subset \mathcal{F}$ , o conjunto  $ZE$  é fechado em  $M$ . De fato, como  $ZE = \bigcap_{e \in E} Ze$ , é suficiente mostrar que  $Ze$  é fechado em  $M$ . Seja  $e \in \mathcal{F}(U)$ . Então  $Ze = (M \setminus U) \cup \{p \in U \mid e_p \in \mathfrak{m}_p\}$ . Resta provar que  $\{p \in U \mid e_p \notin \mathfrak{m}_p\} \subset U$ . Sejam  $p \in U$  e  $e_p \notin \mathfrak{m}_p$ . Já que  $\mathcal{F}$  é local, temos  $e_p f_p = 1$  para adequados  $p \in V \subset M$  e  $f \in \mathcal{F}(V)$ . Pela definição de germe, existe algum  $W \subset U \cap V$  tal que  $p \in W$  e  $e|_W f|_W = 1$ . Logo,  $e_q f_q = 1$  para todo  $q \in W$ . Em outras palavras,  $W \subset \{q \in U \mid e_q \notin \mathfrak{m}_q\}$ .

Ainda mais, os argumentos acima mostram que a função  $\frac{1}{e} : (M \setminus Ze) \rightarrow \mathbb{K}$  definida pela regra  $p \mapsto \frac{1}{e(p)}$  pertence localmente a  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\frac{1}{e} \in \mathcal{F}(M \setminus Ze)$  para todo  $e \in \mathcal{F}$ . Chegamos a outra definição de feixe local: um feixe  $\mathcal{F}$  é local se e só se, para todo  $e \in \mathcal{F}$ , o locus em que  $e$  não se anula é aberto e a função correspondente  $\frac{1}{e}$  definida neste locus pertence a  $\mathcal{F}$ .

Em um feixe arbitrário, podemos somar e multiplicar uma dupla de funções (sobre um locus onde ambas são definidas). Em um feixe local, podemos também efetuar divisão. Assim, faz sentido aprender como derivar uma fração; pela regra de Leibniz,  $t \frac{1}{g} = -\frac{tg}{g^2(p)}$  para todo  $t \in T_p M$  e  $g \in \mathcal{F}_p \setminus \mathfrak{m}_p$ .

Pelo Exercício 3.6.6, o feixe  $\mathcal{F}|_S$  é local para todo subespaço  $S \subset M$  se  $\mathcal{F}$  é local.

**3.6.10. Feixes de Taylor.** Suponha que todo espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita está munido de uma topologia e de um feixe local  $\mathcal{F}^V$  de funções com valores em  $\mathbb{K}$  tais que as seguintes condições sejam satisfeitas.

- A topologia em  $V$  é a mais fraca tal que todas  $\mathcal{F}^V(V) \ni f : V \rightarrow \mathbb{K}$  são contínuas.
- $V^* \subset \mathcal{F}^V(V)$ .
- Sejam  $V, W$  espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita. Uma aplicação  $V \circlearrowright U \xrightarrow{\psi} W$  é suave se e só se  $W^* \circ \psi \subset \mathcal{F}^V(U)$ .
- A composição  $V^* \rightarrow \mathfrak{m}_p \rightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$  é um isomorfismo  $\mathbb{K}$ -linear para todo  $p \in V$ , onde a aplicação  $V^* \rightarrow \mathfrak{m}_p$  é dada pela regra  $\varphi \mapsto \varphi_p - \varphi p \in \mathfrak{m}_p$ .

<sup>7</sup>Apesar de a definição de algum modo funcionar para os feixes  $C^\infty$ .

A última condição providencia a identificação  $T_p V \xrightarrow{\sim} V^{**} \simeq V$  dada pela regra  $t \mapsto (v^* \mapsto tv^*)$ , onde  $v^* \in V^*$ . Esta nada mais é do que a fórmula de Taylor! De fato, seja  $p \in U \subset V$  e seja  $f \in \mathcal{F}^V(U)$ . Então  $f_p - f(p) \in \mathfrak{m}_p$ . Logo, existem únicos  $\varphi \in V^*$  e  $h \in \mathfrak{m}_p^2$  tais que  $f_p = f(p) + \varphi_p - \varphi p + h$ .

Na fórmula de Taylor,  $\varphi$  nos dá a melhor aproximação linear de  $f$  em  $p$  módulo um termo de ordem 2. Assim, não é surpresa que  $df_p v = \varphi v$  em termos da identificação acima. De fato, o vetor  $v \in V$  corresponde ao vetor tangente  $t \in T_p U = T_p V$  tal que  $v^* v = tv^*$  para todo  $v^* \in V^*$ . Por definição,  $df_p t : g \mapsto t(g \circ f)$  para todo  $g \in \mathcal{F}^{\mathbb{K}}(W)$  tal que  $f(p) \in W \subset \mathbb{K}$ . Conseqüentemente,  $df_p v = df_p t \in T_{f(p)} \mathbb{K}$  corresponde a  $k \in \mathbb{K}$  tal que  $k^* k = t(k^* \circ f)$  para todo  $k^* \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}$ . Uma vez que  $k^* \circ f = k^* f$ , obtemos  $k^* k = k^* t(f_p) = k^* t(f(p) + \varphi_p - \varphi p + h) = k^* t \varphi_p = k^* \varphi v$ , o que implica  $k = \varphi v$ .

Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Então a projeção  $\pi : V \oplus V \rightarrow V$  é suave pela terceira e segunda condições. Em particular,  $U \times V = \pi^{-1}(U) \subset (V \oplus V)$  para todo  $U \subset V$ . Finalmente, pedimos que a diferencial  $df_p$  de uma função dependa suavemente em  $p$ :

- Seja  $U \subset V$  e seja  $f \in \mathcal{F}^V(U)$ . Então a função  $d'f : U \times V \rightarrow \mathbb{K}$  dada pela regra  $d'f : (p, v) \mapsto df_p v$  pertence a  $\mathcal{F}^{V \oplus V}(U \times V)$ .

Feixes  $\mathcal{F}^V$  satisfazendo estas cinco condições são chamados feixes de Taylor.

Há muitos feixes de Taylor com os quais lidamos em geometria. Os menores são formados por funções algébricas (e assumem a topologia de Zariski; tal topologia é dada pela topologia finita em  $\mathbb{K}$ , isto é, a mais fraca em que pontos são fechados). Outro exemplo são os feixes de funções analíticas.

Aqui, estamos interessados principalmente nos feixes “grandes”  $C^\infty$  de funções suaves. Já que  $[v]_V \varphi$  é uma constante (igual a  $\varphi v$ ) para todo  $\varphi \in V^*$ , obtemos a segunda condição para os feixes  $C^\infty$ . Os Exercícios 3.3.4, 3.3.5, 3.3.3 e a solução do Exercício 3.3.3 sugerida nas Dicas implicam respectivamente a primeira, terceira, quarta e quinta condições. Vale a pena mencionar que as primeiras três condições são válidas para os feixes  $C^k$ ,  $k \geq 0$ .

**3.6.11. Prevariedades.** Esta é uma subseção crucial nesta seção. Queremos introduzir uma classe conveniente  $\widehat{\mathcal{V}}$  de espaços com feixes, principalmente por meio de determinadas propriedades locais. Em outras palavras, todo espaço em  $\widehat{\mathcal{V}}$  é uma colagem de certos espaços básicos chamados *modelos*. Os modelos vêm de espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita munidos de determinadas estruturas.

Dados feixes de Taylor  $\mathcal{F}^V$ , um espaço  $M$  com um feixe de funções com valores em  $\mathbb{K}$  é dito uma *prevariedade* se, localmente, ele é um subespaço localmente fechado<sup>8</sup> em um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Usualmente, a topologia escolhida em espaços lineares de dimensão finita têm base enumerável. Com o objetivo de manter esta propriedade válida para prevariedades, são permitidas apenas colagens enumeráveis ou finitas de modelos (no caso algébrico, sempre finitas).

Denotamos por  $\widehat{\mathcal{V}}$  a classe de todas as prevariedades. Os feixes em prevariedades são obviamente locais. Segue diretamente da definição acima que  $\widehat{\mathcal{V}}$  é fechado com respeito a tomar-se subespaços localmente fechados — chamados *subprevariedades* — e colagens (enumeráveis ou finitas). Um subespaço fechado/aberto em uma prevariedade é chamado uma *subprevariedade fechada/aberta*. A interseção finita de subprevariedades (fechadas/abertas) é uma subprevariedade (fechada/aberta). Seja  $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} (N, \mathcal{G})$  uma aplicação suave entre prevariedades e seja  $S \subset N$  uma subprevariedade (fechada/aberta). Então  $\psi^{-1}(S)$  é uma subprevariedade (fechada/aberta) em  $M$ .

**3.6.12. Exercício.** Seja  $M \in \widehat{\mathcal{V}}$  uma prevariedade e seja  $U \subset M$ . Prove que  $\mathcal{F}^M(U)$  consiste de todas as aplicações suaves  $U \rightarrow \mathbb{K}$ .

**3.6.13. Lema.** Para todos  $M, N \in \widehat{\mathcal{V}}$ , existe uma estrutura de  $\widehat{\mathcal{V}}$ -produto em  $M \times N$ .

**Demonstração.** Pelos Exercícios 3.5.4 e 3.5.3, é suficiente mostrar que existe uma estrutura de  $\widehat{\mathcal{V}}$ -produto em  $V_1 \times V_2$ , onde os  $V_i$ 's são espaços lineares de dimensão finita. A projeção  $V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_i$  é

<sup>8</sup>Um subespaço  $S$  em um espaço topológico  $M$  é *localmente fechado* se  $S = U \cap X$ , onde  $X$  é fechado em  $M$  e  $U \subset M$ .

suave pela terceira condição em 3.6.10. Seja  $M \in \widehat{\mathcal{V}}$  e seja  $\psi_i : M \rightarrow V_i$  suave para  $i = 1, 2$ . Precisamos mostrar que a aplicação correspondente  $\psi : M \rightarrow V_1 \oplus V_2$  é suave. Pelo Exercício 3.4.1, podemos assumir que  $M$  é um modelo, isto é,  $M \subset U \subset V$ , onde  $V$  é um espaço linear de dimensão finita.

Seja  $v_{ij}^* \in V_i^*$  uma base linear em  $V_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $f_{ij} := v_{ij}^* \circ \psi_i \in \mathcal{F}^M(M)$  pela segunda condição em 3.6.10. Toda função em  $\mathcal{F}^M(M)$  é localmente uma restrição de uma função em  $\mathcal{F}^U$ . Sem perda de generalidade, podemos portanto assumir (utilizando novamente o Exercício 3.4.1) que  $f_{ij} = \hat{f}_{ij}|_M$  para todos  $i, j$ , onde  $\hat{f}_{ij} \in \mathcal{F}^U(U)$ . Existe uma única aplicação  $\hat{\psi}_i : U \rightarrow V_i$  tal que  $v_{ij}^* \circ \hat{\psi}_i = \hat{f}_{ij}$  para todo  $j$ . Pela terceira condição em 3.6.10,  $\hat{\psi}_i$  é suave. Obviamente,  $\psi_i = \hat{\psi}_i|_M$ . Logo, reduzimos a tarefa para o caso em que  $M = U$ . Neste caso, o fato desejado segue imediatamente de segunda e terceira condições em 3.6.10 ■

Denotamos por  $\Delta_B := \{(p, p) \mid p \in B\} \subset B \times B$  a *diagonal* em  $B \times B$ . (Na verdade,  $\Delta_B = B \times_B B$  com respeito às aplicações identidade  $B \xrightarrow{1_B} B \xleftarrow{1_B} B$ .)

**3.6.14. Lema.** *Sejam  $M_1, M_2, B \in \widehat{\mathcal{V}}$  e sejam  $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} B \xleftarrow{\varphi_2} M_2$  aplicações suaves. Então a diagonal  $\Delta_B$  é localmente fechada em  $B \times B$ . Se  $B \subset V$  é um modelo, isto é, uma subprevariedade em um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita, então  $\Delta_B$  é fechada em  $B \times B$ . Existe uma  $\widehat{\mathcal{V}}$ -estrutura de produto fibrado em  $M_1 \times_B M_2$ .*

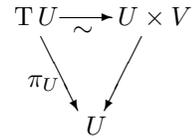
**Demonstração.** A segunda afirmação segue de  $\Delta_B = \Delta_V \cap (B \times B)$  e de  $\Delta_V = Z_{V \times V} \{v^* \circ \pi_1 - v^* \circ \pi_2 \mid v^* \in V^*\}$ , onde  $\pi_i : V \times V \rightarrow V$  denota as projeções.

Para provar a primeira afirmação, observamos que  $\Delta_B \cap (B_i \times B_i) = \Delta_{B_i}$  é fechado em  $B_i \times B_i$  pela primeira afirmação, onde  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$  é uma colagem de modelos  $B_i \subset B$ ,  $i \in I$ . Portanto,  $\Delta_B$  é fechado em  $\bigcup_{i \in I} (B_i \times B_i) \subset B \times B$ .

Para a terceira afirmação, pelos Lema 3.6.13 e Exercício 3.5.7, basta mostrar que  $M_1 \times_B M_2$  é localmente fechado em  $M_1 \times M_2$ . Já que  $\Delta_B$  é localmente fechado em  $B \times B$  pela primeira afirmação, resta observar que  $M_1 \times_B M_2 = (\psi_1 \times \psi_2)^{-1}(\Delta_B)$ , onde a aplicação  $\psi_1 \times \psi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow B \times B$  no diagrama comutativo é suave pelas propriedades do  $\widehat{\mathcal{V}}$ -produto  $B \times B$  ■

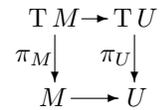
Iremos provar que a diferencial é uma aplicação suave. Inicialmente, necessitamos introduzir uma estrutura suave no fibrado tangente.

Seja  $M$  um modelo. Logo,  $M \subset U$  é uma subprevariedade fechada em uma subprevariedade aberta  $U \subset V$  em um espaço  $\mathbb{K}$ -linear  $V$  de dimensão finita. Temos a projeção canônica  $\pi_U : TU \rightarrow U$ . Os isomorfismos  $T_p U = T_p V \simeq V$ ,  $p \in U$ , providenciam a outra projeção  $\pi' : TU \rightarrow V^{**} \simeq V$  dada pela regra  $t \mapsto (v^* \mapsto tv^*)$ , onde  $v^* \in V^*$ . Usando as projeções  $\pi_U, \pi'$ , obtemos uma identificação  $TU \simeq U \times V$ , isto é, uma *trivialização* do fibrado tangente sobre  $U$ . No nível das fibras, esta identificação é um isomorfismo de espaços  $\mathbb{K}$ -lineares. Uma vez que  $U \times V \subset V \oplus V$  é uma subprevariedade aberta, obtemos a estrutura induzida em  $TM \subset TU \simeq U \times V$  e uma projeção suave  $\pi_M : TM \rightarrow M$ . Pelo Exercício 3.6.7 e pela quinta condição em 3.6.10,



$$TM = Z_{U \times V}(IM \circ \pi_U) \cap Z_{U \times V} \{d'f \in \mathcal{F}^{V \oplus V}(W \times V) \mid f \in IM(W), W \subset U\}$$

é dado por equações; deste modo,  $TM$  é fechado em  $TU$  e todas as aplicações no diagrama comutativo são suaves. Em outras palavras, a estrutura em  $TM$  é induzida de  $TV = V \times V$  com respeito à imersão  $M \hookrightarrow V$ .



**3.6.15. Lema.** *Seja  $M_i \subset U_i$  uma subprevariedade fechada, onde  $U_i \subset V_i$  é aberto em um espaço linear  $V_i$  de dimensão finita, e seja  $TM_i$  munido da estrutura induzida de  $TV_i = V_i \times V_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então, para toda aplicação suave  $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ , a diferencial  $d\psi : TM_1 \rightarrow TM_2$  é suave.*

**Demonstração.** Podemos assumir que  $M_2 = V_2$ . Seja  $v_j^* \in V_2^*$  uma base linear. As funções  $v_j^* \circ \psi \in \mathcal{F}^{M_1}(M_1)$  são localmente restrições de algumas funções  $f_j \in \mathcal{F}^{U_1}$ . Pelo Exercício 3.4.1, podemos assumir que  $f_j \in \mathcal{F}^{U_1}(U_1)$ . Existe uma única aplicação  $\hat{\psi} : U_1 \rightarrow V_2$  tal que  $v_j^* \circ \hat{\psi} = f_j$  para todo  $j$ . Em outras palavras,  $\psi = \hat{\psi}|_{M_1}$ . Pela terceira condição em 3.6.10,  $\hat{\psi}$  é suave. Logo, podemos tomar  $M_1 = U_1$ .

Pelas propriedades do  $\widehat{V}$ -produto  $V_2 \times V_2$ , é suficiente mostrar que  $\pi' \circ d\psi : \mathbb{T}U_1 \rightarrow V_2$  é suave, já que  $\pi_{V_2} \circ d\psi = \psi \circ \pi_{U_1}$  é suave. Pela terceira condição em 3.6.10, precisamos apenas verificar que  $v^* \circ \pi' \circ d\psi \in \mathcal{F}^{U_1 \times V_1}(U_1 \times V_1)$  para todo  $v^* \in V_2^*$ . Assim, pela quinta condição em 3.6.10, resta checar que  $v^* \circ \pi' \circ d\psi = d'f$ , onde  $f := v^* \circ \psi \in \mathcal{F}^{U_1}(U_1)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{T}U_1 & \xrightarrow{d\psi} & V_2 \times V_2 & \xrightarrow{\pi'} & V_2 \\ \pi_{U_1} \downarrow & & \pi_{V_2} \downarrow & & v^* \downarrow \\ U_1 & \xrightarrow{\psi} & V_2 & & \mathbb{K} \end{array}$$

Seja  $p \in U_1$ , seja  $t \in \mathbb{T}_p U_1$  e sejam  $v \in V_1, v' \in V_2$  os vetores correspondentes a  $t, d\psi t$ . Isto significa que  $t\varphi = \varphi v$  para todo  $\varphi \in V_1^*$ , que  $\pi'(d\psi t) = v'$  e que  $(d\psi t)v^* = v^*v'$ . Pela quarta condição em 3.6.10, temos  $f_p = f(p) + \varphi_p - \varphi(p) + h$  com  $h \in \mathfrak{m}_p^2 \subset \mathcal{F}_p^{U_1}$  e  $\varphi \in V_1^*$ . Conseqüentemente,

$$d'f(p, v) = df_p v = \varphi v = t\varphi = tf = t(v^* \circ \psi) = (d\psi t)v^* = v^*v' = v^*(\pi'(d\psi t)) = (v^* \circ \pi' \circ d\psi)t \blacksquare$$

Tomando  $M_1 := M_2 := M$  e  $\psi := 1_M$  no Lema 3.6.15, podemos ver que a estrutura induzida em  $\mathbb{T}M \subset \mathbb{T}V$  é independente da escolha de um mergulho  $M \hookrightarrow V$  para um espaço linear.

Seja  $M$  uma prevariedade arbitrária. Ela é uma colagem de modelos  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Pelo Exercício 3.4.2, podemos introduzir uma estrutura em  $\mathbb{T}M$  como uma colagem das estruturas em  $\mathbb{T}M_i \subset \mathbb{T}M$  uma vez que as estruturas em  $\mathbb{T}(M_i \cap M_j)$  induzidas de  $\mathbb{T}M_i$  e de  $\mathbb{T}M_j$  são as mesmas pelo Lema 3.6.15. Um argumento similar mostra que a estrutura construída em  $\mathbb{T}M$  é independente da escolha de uma colagem  $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ . Pelos Exercício 3.4.1 e Lema 3.6.15, a diferencial  $d\psi$  de uma aplicação suave  $\psi : M_1 \rightarrow M_2$  entre prevariedades é uma aplicação suave.

**3.6.16. Exercício.** Seja  $M \in \widehat{V}$  uma prevariedade. Mostre que as aplicações  $\mathbb{T}M \times_M \mathbb{T}M \xrightarrow{+} \mathbb{T}M$ ,  $(t_1, t_2) \mapsto t_1 + t_2$ , e  $\mathbb{K} \times \mathbb{T}M \xrightarrow{\cdot} \mathbb{T}M$ ,  $(k, t) \mapsto kt$ , são suaves. Em palavras, as operações  $+$  e  $\cdot$  são suaves no fibrado tangente (onde forem definidas).

**3.7.  $C^\infty$ -variedades.** Seja  $M$  um espaço topológico hausdorff munido de um feixe de funções  $C^\infty$  com valores em  $\mathbb{K}$  e possuindo uma base enumerável de topologia. Dizemos que  $M$  é uma  $C^\infty$ -variedade (ou, simplesmente, uma *variedade*) se, localmente,  $M$  é uma subvariedade aberta em um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita.

Sejam  $T_1, T_2$  espaços topológicos. A topologia mais fraca em  $T_1 \times T_2$  com projeções contínuas  $\pi_i : T_1 \times T_2 \rightarrow T_i$  é chamada topologia *produto*. Advertimos o leitor de que a topologia introduzida nas Subseções 3.5 e 3.6.11 em  $\widehat{V}$ -produtos pode ser mais forte do que a topologia produto. Isto acontece, por exemplo, no caso dos feixes de funções algébricas. Entretanto, para os feixes  $C^\infty$ , estas duas topologias coincidem pelo Exercício 3.3.4.

**3.7.1. Exercício.** Mostre que um espaço topológico  $T$  é hausdorff se e só se a diagonal  $\Delta_T$  é fechada na espaço  $T \times T$  munido da topologia produto.

**3.7.2. Famílias e fibrados.** Sejam  $\pi_i : T_i \rightarrow B$  aplicações suaves entre prevariedades  $T_i, B \in \widehat{V}$ ,  $i = 1, 2$ . Podemos interpretar  $\pi_i$  como uma *família* de espaços  $\pi_i^{-1}(p)$ , chamados *fibras*, parametrizados por  $p \in B$ . Um *morfismo* entre tais famílias é uma aplicação suave  $\psi : T_1 \rightarrow T_2$  tal que  $\pi_2 \circ \psi = \pi_1$ . Obviamente, a composição de morfismos é um morfismo e a aplicação identidade é um morfismo. Um morfismo inversível (= que possui uma inversa dos dois lados) é um *isomorfismo*.

Sejam  $F, B \in \widehat{V}$  prevariedades. Um *fibrado trivial* sobre  $B$  é uma família de subespaços  $\pi : T \rightarrow B$  isomorfa à família trivial  $F \times B \rightarrow B$ . Em outras palavras, um fibrado trivial é um produto que esqueceu

uma das suas projeções. Uma família de subespaços  $\pi : T \rightarrow B$  é um *fibrado* se é *localmente trivial*, isto é, se existe uma cobertura aberta da *base*  $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ , chamada uma cobertura *trivializante*, tal que

$\pi^{-1}(B_i) \rightarrow B_i$  é um fibrado trivial para todo  $i \in I$ . É imediato que um fibrado sobre uma variedade cujas fibras são variedades é também uma variedade. Como vimos na Subseção 3.6.11, o fibrado tangente  $\pi : TM \rightarrow M$  de qualquer variedade  $M$  é um fibrado. Entretanto, em geral, o fibrado tangente de uma prevariedade não é um fibrado!<sup>9</sup> Um fibrado com fibras discretas é chamado um *recobrimento (regular)*. Recobrimentos são essenciais quando estudamos variedades que possuem uma estrutura geométrica (vide Seção 5). O leitor pode ver a figura de um recobrimento bastante simples bem no começo da Seção 2.

**3.7.3. Exercício.** Prove que a esfera e o espaço projetivo são variedades compactas.

**3.7.4A. Exemplo.** Mais geralmente, prove que as grassmannianas  $\text{Gr}_{\mathbb{K}}(k, V)$  e  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}^+(k, V)$  são variedades compactas (vide 2.12A e 3.4.4A).

**3.7.5. Exercício.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita. Mostre que

$$T := \{(l, v) \mid V \geq l \ni v, \dim_{\mathbb{K}} l = 1\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \times V$$

é uma subvariedade fechada e que a projeção para  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  determina um fibrado  $\pi : T \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ . Este fibrado é denominado *tautológico*. Visualize  $T$  como uma fita de Möbius no caso em que  $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ . Todos os fibrados tautológicos são triviais?

**3.7.6A. Exercício.** Mais geralmente, formule e resolva um exercício similar sobre grassmannianas.

**3.7.7. Exercício.** Prove que a superfície de um 3-cubo em  $\mathbb{R}^3$  não é uma  $C^\infty$ -variedade.

**3.7.8. Vetor tangente a uma curva.** Uma aplicação suave  $\mathbb{R} \circlearrowright (a, b) \xrightarrow{c} M$  para uma  $C^\infty$ -prevariedade  $(M, \mathcal{F})$  é uma *curva suave parametrizada*. O *vetor tangente*  $\dot{c}(t_0)$  à curva  $c$  no ponto  $c(t_0)$  é dado pela fórmula  $\mathcal{F}_{c(t_0)} \ni f_{c(t_0)} \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(c(t))$ . É fácil ver que todo vetor tangente a uma variedade é tangente a uma curva suave apropriada.

**3.7.9. Exercício.** Traduza qualquer livro de topologia diferencial básica (quanto pior o livro, melhor) para os termos da exposição acima.

**3.8A. Observações finais.** É importante estudar-se não apenas variedades suaves mas também variedades com singularidades (espaços analíticos no caso de feixes analíticos). Tais “variedades” devem ser definidas por meio de modelos  $M \subset U \subset V$  cujo feixe  $IM$  de ideais satisfaz determinadas condições de finitude. Neste caso, nossas considerações em 3.6.11–16 devem funcionar para “variedades”.

Há indicações de que um definição correta de espaço suave deve ser próxima àquela mencionada na Observação 3.8.1A abaixo. Entretanto, se fôssemos simplesmente aceitar tal definição, não teríamos tido a jornada anterior em torno do mundo dos espaços suaves.

**3.8.1A. Observação.** Sejam  $(M, \mathcal{F}^M)$  e  $(T^*, \mathcal{F}^{T^*})$  espaços com feixes de funções com valores em  $\mathbb{K}$  e seja  $\pi : T^* \rightarrow M$  uma aplicação suave cujas fibras são espaços  $\mathbb{K}$ -lineares de dimensão finita tais que as operações globais  $+$  :  $T^* \times_M T^* \rightarrow T^*$  e  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times T^* \rightarrow T^*$  são suaves. Parece possível definir “variedades” nestes termos através de um morfismo de de Rham dos feixes  $d : \mathcal{F}^M \rightarrow \mathcal{F}^{T^*}$  sujeito à uma regra de Leibniz, onde  $\mathcal{T}^*$  denota o feixe de seções suaves de  $\pi : T^* \rightarrow M$ .

<sup>9</sup>Para os feixes  $C^\infty$ , o fibrado tangente de uma prevariedade que não é uma variedade pode ser um fibrado (tome, por exemplo, uma bola fechada). No caso da geometria algébrica, o fibrado tangente de uma prevariedade raramente é um fibrado. Isto acontece, digamos, quando a prevariedade é suave e racional.

#### 4. Geometria elementar

*houve e há ainda agora geômetras e filósofos  
... que duvidam que todo o universo ... foi criado  
puramente em acordo com a geometria Euclidiana*

— FYODOR DOSTOYEVSKY, *Os irmãos Karamazov*

*A partir de nada eu criei um estranho novo universo.*

— JÁNOS BOLYAI

Por muito tempo, houve pouca dúvida de que a geometria Euclidiana é a geometria “correta”; hoje em dia, a geometria não-Euclidiana está envolvida em muitas áreas da geometria e da física. Não é exagero dizer que a descoberta da geometria não-Euclidiana, mais especificamente, da geometria hiperbólica, representou um avanço excepcional na matemática e na filosofia. A antiga questão acerca do quinto postulado<sup>10</sup> foi finalmente respondida, e a resposta era espantosa: o aparentemente evidente quinto postulado acabou por ser *independente* já que as geometrias hiperbólica e Euclidiana compartilham os mesmos axiomas exceto pelo quinto (que é falso no plano hiperbólico). É claro que não estamos interessados em geometria axiomática aqui. Ao invés disto, estudaremos a geometria hiperbólica e muitas outras geometrias não-Euclidianas na base de álgebra linear simples. A este respeito, o leitor fica convidado a consultar a Seção 6, devotada às ferramentas lineares e hermitianas.

**4.1. Alguma notação.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear de dimensão finita munido de uma forma hermitiana não-degenerada  $\langle -, - \rangle$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dependendo do contexto, nós freqüentemente utilizaremos uma mesma letra para denotar um ponto em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  e um representante em  $V$ . Utilizamos as notações e convenções para projeções introduzidas na Subseção 2.6 : dado um subconjunto  $S \subset V$ , a imagem de  $S$  pela aplicação quociente  $\pi : V \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  é denotada por  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S := \pi(S \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ .

A *assinatura* de  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  é o sinal de  $\langle p, p \rangle$  (esta pode ser  $-$ ,  $+$  ou  $0$ ). Note que a assinatura é bem definida uma vez que, para outro representante  $kp \in V$ ,  $k \in \mathbb{K}^*$ , temos  $\langle kp, kp \rangle = |k|^2 \langle p, p \rangle$ . O espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  é dividido em três partes disjuntas consistindo de pontos *negativos*, *positivos* e *isotrópicos*:

$$BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad EV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}, \quad SV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\}.$$

Os pontos isotrópicos constituem o *absoluto*  $SV$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ . O absoluto é uma “parede” separando as geometrias (ainda não introduzidas) em  $BV$  e em  $EV$ . Além disso, veremos mais tarde que também o absoluto possui sua própria geometria. Denotamos  $\overline{BV} := BV \sqcup SV$  e  $\overline{EV} := EV \sqcup SV$ .

Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  não-isotrópico. Introduzimos a seguinte notação para a decomposição ortogonal:

$$V = \mathbb{K}p \oplus p^\perp, \quad v = \pi'[p]v + \pi[p]v,$$

onde

$$\pi'[p]v := \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in \mathbb{K}p, \quad \pi[p]v := v - \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \in p^\perp.$$

É fácil ver que  $\pi'[p]$  e  $\pi[p]$  não dependem da escolha de um representante  $p \in V$ .

**4.2. Espaço tangente.** Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ , seja  $f$  uma função suave definida em uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  de  $p$  e seja  $\varphi : \mathbb{K}p \rightarrow V$  uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear. Utilizando a notação da Subseção 3.3, definimos

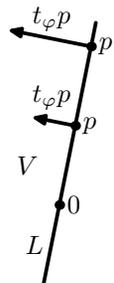
$$t_\varphi f := (\varphi p)_p \tilde{f},$$

<sup>10</sup>Grosso modo, o postulado diz: dados um ponto e uma reta, existe uma única paralela passando pelo ponto.

onde  $\tilde{f}$  denota o levantamento de  $f$  para uma vizinhança aberta de  $\mathbb{K} \cdot p$  em  $V$ . Tal levantamento satisfaz  $\tilde{f}(kp) = \tilde{f}(p)$  para todo  $k \in \mathbb{K}^*$ .

**4.2.1. Exercício.** Verifique que  $t_\varphi$  é bem definido e conclua que  $t_\varphi \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ . Mostre que  $t_\varphi = 0$  se e só se  $\varphi p \in \mathbb{K}p$ . Portanto,  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, V/\mathbb{K}p)$ . Para um  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  não-isotrópico, temos as identificações  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, p^\perp) = \langle -, p \rangle p^\perp$ , onde  $\langle -, p \rangle v : x \mapsto \langle x, p \rangle v$ .

Intuitivamente, podemos interpretar a identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, p^\perp)$  como se segue. Um ponto  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  corresponde a uma reta  $L \subset V$  passando por 0. Um vetor tangente  $t_\varphi$  em  $p$  é um movimento infinitesimal de  $L$  (uma espécie de rotação em torno do 0) e portanto pode ser exibido como uma direção ortogonal a  $L$ . Mas esta direção não é meramente um elemento  $t_\varphi p \in p^\perp$ : o fato que  $t_\varphi$  é uma aplicação linear providencia a independência da escolha de um representante  $p \in V$ .



O vetor tangente a uma curva suave em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  em um ponto não-isotrópico  $p$  pode ser convenientemente expressado em termos da identificação  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V = \text{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}p, p^\perp)$ :

**4.2.2. Exercício.** Seja  $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  uma curva suave, seja  $c_0 : (a, b) \rightarrow V$  um levantamento suave de  $c$  para  $V$  e seja  $c(t)$  um ponto não-isotrópico,  $t \in (a, b)$ . Mostre que o vetor tangente a  $c$  em  $c(t)$  corresponde à aplicação  $\mathbb{K}$ -linear  $\dot{c}(t) : \mathbb{K}c_0(t) \rightarrow c_0(t)^\perp$ ,  $c_0(t) \mapsto \pi[c_0(t)]\dot{c}_0(t)$ .

**4.2.3.\* Exercício.** Seja  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear. Um ponto  $p \in W$  é dito *projetivamente suave* se  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}p \cap W) = \min_{0 \neq w \in W} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}w \cap W)$ . Mostre que a projetivização  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}S \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  do subconjunto  $S \subset W$  formado por todos os pontos projetivamente suaves em  $W$  é uma subvariedade. Seja  $p \in S$  um ponto projetivamente suave e seja  $\varphi : \mathbb{K}p \rightarrow V$  uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear. Mostre que  $t_\varphi \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}S$  se e só se  $\varphi p \in W + \mathbb{K}p$ .

**4.3. Métrica.** Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  um ponto não-isotrópico. Dado  $v \in p^\perp$ , definimos

$$t_{p,v} := \langle -, p \rangle v \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V.$$

Note que  $t_{p,v}$  não depende da escolha de um representante  $p \in V$ : Se tomamos um novo representante  $\bar{k}p \in V$ ,  $\bar{k} \in \mathbb{K}^*$ , então precisamos tomar  $\frac{1}{\bar{k}}v \in V$  no lugar de  $v$  para manter  $t_{p,v}$  o mesmo.

O espaço tangente  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  está munido da forma hermitiana

$$(4.3.1) \quad \langle t_{p,v_1}, t_{p,v_2} \rangle := \pm \langle p, p \rangle \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Esta definição é correta uma vez que a fórmula é independente de escolha de representantes  $p, v_1, v_2 \in V$  que providenciam os mesmos  $t_{p,v_1}, t_{p,v_2}$ . Pode-se imediatamente ver que esta forma hermitiana, chamada uma *métrica hermitiana* (ou, simplesmente, uma *métrica*), varia suavemente com o ponto não-isotrópico  $p$ . Na verdade, esta é mais uma instância de uma situação típica em que devemos provar a dependência suave em um parâmetro. Em geral, tais casos podem ser tratados como no Exercício 3.6.16 e usualmente o conceito de produto fibrado deve ser explorado. O único passo essencial na demonstração consiste em observar a natureza (digamos) algébrica das fórmulas envolvendo o parâmetro.

Para o quê precisamos de uma métrica hermitiana?

**4.3.2. Comprimento e ângulo.** Seja  $M$  uma variedade suave tal que todo espaço tangente  $T_p M$  está munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  positivo-definida que varia suavemente com  $p$ . Então podemos medir o comprimento de uma curva suave  $c : [a, b] \rightarrow M$  utilizando a fórmula familiar

$$\ell c := \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt,$$

onde  $\dot{c}(t)$  denota o vetor tangente a  $c$  em  $c(t)$ .

Podemos também medir o ângulo não-orientado  $\alpha \in [0, \pi]$  entre vetores tangentes não-nulos  $0 \neq t_1, t_2 \in T_p M$  utilizando a outra fórmula familiar

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}\langle t_1, t_2 \rangle}{\sqrt{\langle t_1, t_1 \rangle} \cdot \sqrt{\langle t_2, t_2 \rangle}}.$$

No caso particular em que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e o subespaço real  $\mathbb{R}t_1 + \mathbb{R}t_2 \leq T_p M$  é complexo, o ângulo orientado  $\alpha \in [0, 2\pi)$  de  $t_1$  a  $t_2$  é dado por  $\alpha = \operatorname{Arg}\langle t_2, t_1 \rangle$ .

Em outras palavras, uma *métrica hermitiana* é o que dá à variedade uma estrutura geométrica.

**4.4. Exemplos.** Tomando um corpo  $\mathbb{K}$  particular e uma assinatura para a forma  $\langle -, - \rangle$  em  $V$ , obtemos vários exemplos de geometrias clássicas.

- Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++$  e o sinal  $+$  em (4.3.1). A esfera de Riemann  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  torna-se uma esfera *redonda*. Ela parece exatamente igual à esfera usual (de raio  $\frac{1}{2}$ ) no espaço Euclidiano tridimensional (vide 4.5.4).

- Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $-+$  e o sinal  $-$  em (4.3.1).

**4.4.1. Exercício.** Mostre que a esfera de Riemann  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é formada pelos discos fechados  $\overline{BV}$  e  $\overline{EV}$  colados ao longo do absoluto  $SV$ . Note que a métrica hermitiana em  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é positivo-definida para todo  $p$  não-isotrópico.

Cada um dos  $BV$  e  $EV$  é um disco de *Poincaré*. Cada disco está munido da correspondente métrica e constitui o famosíssimo modelo da geometria *hiperbólica* plana. Chamamos  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  a esfera de *Riemann-Poincaré*.<sup>11</sup>

- Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $-+++$  e o sinal  $-$  em (4.3.1).

**4.4.2. Exercício.** Mostre que o plano projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  é formado pelo disco fechado  $\overline{BV}$  e pela fita de Möbius  $\overline{EV}$  colados ao longo do absoluto  $SV$ . Note que a métrica em  $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  é positivo-definida para  $p \in BV$  e tem assinatura  $-+$  para  $p \in EV$ .

A métrica na fita de Möbius  $EV$  não é positivo-definida (ela é chamada uma métrica *lorentziana*). Apesar deste fato, a métrica ainda mune  $EV$  de sua geometria adequada. O fato que os conceitos de comprimento e ângulo não funcionam completamente neste caso não significa de modo algum que a geometria foi perdida (vide Subseção 4.5.11).

O disco  $BV$  munido de sua métrica é conhecido como o disco de *Beltrami-Klein*. Ele constitui outro modelo de geometria hiperbólica plana. É fácil mostrar (vide Exercício 4.5.10) que o disco de Beltrami-Klein e o disco de Poincaré são essencialmente isométricos. Entretanto, há algo fundamentalmente diferente a respeito destes dois espaços hiperbólicos: enquanto o complemento de um disco de Poincaré em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é outro disco de Poincaré, o complemento do disco de Beltrami-Klein em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  é uma fita de Möbius lorentziana ... vamos em breve descobrir que há mais sobre a sentença anterior do que simplesmente citar os nomes de cinco grandes matemáticos.

- Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $-+++$  e o sinal  $-$  em (4.3.1). A 4-bola aberta  $BV \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  é o plano *hiperbólico complexo*. Chamamos todo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  de plano *hiperbólico complexo estendido*. É curioso que todos os exemplos acima podem ser naturalmente mergulhados no plano hiperbólico complexo estendido (vide 4.7). Ainda mais, pode-se deformar uma esfera redonda (mergulhada) em uma esfera de Riemann-Poincaré ... Qual geometria deve aparecer no caminho da deformação?

- Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $-+++$  e o sinal  $-$  em (4.3.1). A 3-bola aberta  $BV \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  é o espaço *hiperbólico real*. A variedade  $EV$  — chamada espaço de *de Sitter* — é lorentziana, isto é, a assinatura da métrica em  $T_p EV$  é  $-+++$  para todo  $p \in EV$ . O espaço de de Sitter é popular entre os físicos, que pensam que ele se aplica à relatividade geral.

<sup>11</sup>Agradecemos ao Pedro Walmsley Frejlich por sugerir este termo.

• Tomamos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $+\cdots+$  e o sinal  $+$  em (4.3.1). Obtemos o espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  munido da métrica (positivo-definida) de *Fubini-Study*. Esta métrica é essencial em muitas áreas da matemática e da física, incluindo a análise complexa e a mecânica clássica/quântica.

**4.5. Geodésicas e tância.** Seja  $W \leq V$  um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear 2-dimensional tal que a forma hermitiana, sendo restrita a  $W$ , é real e não-nula. Chamamos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  uma *geodésica*.

**4.5.1. Exercício.** Mostre que  $\mathbb{K}p \cap W = \mathbb{R}p$  para todo  $0 \neq p \in W$  e que  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$ . Logo, toda geodésica é topologicamente uma circunferência. A geodésica  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  gera a sua linha projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}W) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ . As geodésicas  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W_1$  e  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W_2$  são iguais se e só se  $W_1 = kW_2$  para algum  $k \in \mathbb{K}$ .

**4.5.2. Exercício.** Seja  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  uma linha projetiva,  $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$ . Dado  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  não-isotrópico, existe um único  $q \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  tal que  $\langle p, q \rangle = 0$  (em palavras,  $q$  é ortogonal a  $p$ ). Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  pontos distintos. Se  $p_1, p_2$  são não-ortogonais, então existe uma única geodésica contendo  $p_1, p_2$ . Se  $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$  e  $p_1$  é não-isotrópico, então toda geodésica em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  passando por  $p_1$  também passa por  $p_2$ .

**4.5.3. Exercício.** Seja  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  um ponto não-isotrópico e seja  $0 \neq t \in T_p \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  um vetor tangente em  $p$  não-nulo. Mostre que existe uma única geodésica passando por  $p$  com vetor tangente  $t$ . Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  pontos distintos não-ortogonais com  $p_1$  não-isotrópico e seja  $G$  a geodésica que passa por  $p_1$  e  $p_2$ . Denotamos por  $q \in G$  o ponto ortogonal a  $p_1$ . Mostre que  $\langle -, p_1 \rangle \frac{\pi \langle p_1, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_1 \rangle}$  é um vetor tangente em  $p_1$  ao segmento orientado de geodésica de  $p_1$  para  $p_2$  que não contém  $q$ .

Calculemos o comprimento de geodésicas. Pelo Exercício 4.5.1, podemos assumir que  $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$ .

**4.5.4. Geodésicas esféricas.** Uma geodésica  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  é *esférica* se  $W$  tem assinatura  $++$ . Uma tal geodésica gera a linha projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  com  $V$  de assinatura  $++$ . Parametizemos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ . Seja  $p_1 \in W$ . Incluímos  $p_1$  em uma base ortonormal  $p_1, q \in V$  com  $q \in W$ . A curva

$$c_0 : [0, a] \rightarrow V, \quad c_0(t) := p_1 \cos t + q \sin t, \quad a \geq 0$$

é um levantamento para  $V$  de um segmento de geodésica  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  ligando  $p_1 = c(0)$  e  $p_2 := c(a)$ . Pelo Exercício 4.2.2, o vetor tangente a  $c$  em  $c(t)$  é igual a

$$\dot{c}(t) = \langle -, c_0(t) \rangle \frac{\pi [c_0(t)] \dot{c}_0(t)}{\langle c_0(t), c_0(t) \rangle} = \langle -, c_0(t) \rangle \dot{c}_0(t)$$

já que  $\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = 1$  e  $\langle \dot{c}_0(t), c_0(t) \rangle = 0$  para todo  $t \in [0, a]$ . Portanto,  $\ell c = \int_0^a \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt = \int_0^a dt = a$  (tomamos o sinal  $+$  em (4.3.1)). Se  $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , então  $a$  pode ser expressado em termos da *tância*

$$(4.5.5) \quad \text{ta}(p_1, p_2) := \frac{\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle \langle p_2, p_2 \rangle}.$$

Pelo critério de Sylvester,  $\text{ta}(p_1, p_2) \in [0, 1]$  com os valores extremos correspondendo a  $p_2 = q$  e a  $p_2 = p_1$ . Um cálculo direto mostra que  $\text{ta}(p_1, p_2) = \cos^2 a$ . Assim,

$$\ell c = \arccos \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}.$$

Sejam  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  pontos distintos não-ortogonais em uma geodésica esférica. Eles dividem a circunferência  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  em dois segmentos. Aquele segmento que não contém o ponto ortogonal (*antípoda*) a  $p_1$  é o *menor* segmento ligando  $p_1$  e  $p_2$  e o seu comprimento  $a < \frac{\pi}{2}$  é dado pela fórmula acima. Quando

$p_1, p_2$  são ortogonais, ambos os segmentos têm comprimento  $\frac{\pi}{2}$ . É por isto que, nos Exemplos 4.4, a esfera redonda tem raio  $\frac{1}{2}$ .

**4.5.6. Geodésicas hiperbólicas.** Uma geodésica  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  é *hiperbólica* se  $W$  tem assinatura  $-+$ . Uma tal geodésica gera a linha projetiva  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  com  $V$  de assinatura  $-+$ . Parametrizemos  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$ . Seja  $p_1 \in W$  não-isotrópico. Incluímos  $p_1$  em uma base ortonormal  $p_1, q \in V$  com  $q \in W$ . A curva

$$c_0 : [0, a] \rightarrow V, \quad c_0(t) := p_1 \cosh t + q \sinh t, \quad a \geq 0$$

é um levantamento para  $V$  de um segmento de geodésica  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  ligando  $p_1 = c(0)$  e  $p_2 := c(a)$ . (As funções hiperbólicas são definidas como  $\cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  e  $\sinh t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .) É fácil ver que  $\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = \langle p_1, p_1 \rangle$  para todo  $t \in [0, a]$ . Logo, o segmento  $c$  não contém pontos isotrópicos. Como acima,  $\ell c = a$  (tomamos o sinal  $-$  em (4.3.1)). Pelo critério de Sylvester,  $\text{ta}(p_1, p_2) \geq 1$  com o valor extremo correspondendo a  $p_2 = p_1$ . Assim,

$$\ell c = \text{arccosh} \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}.$$

Uma geodésica hiperbólica contém exatamente dois pontos isotrópicos chamados *vértices*. Eles dividem a geodésica em duas partes; uma é positiva e, a outra, negativa. Os vértices podem ser tratados como pontos no infinito.

**4.5.7. Desigualdade triangular.** Podemos utilizar as expressões acima e introduzir funções distância nas partes de  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$  onde a métrica hermitiana (4.3.1) é positivo-definida: a *distância hiperbólica*  $d(p_1, p_2) := \text{arccosh} \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}$  é uma função distância na geometria hiperbólica real/complexa; a *distância esférica*  $d(p_1, p_2) := \arccos \sqrt{\text{ta}(p_1, p_2)}$  é uma função distância nos espaços de Fubini-Study.

Estas fórmulas são monótonas na tância. Portanto, parece uma boa ideia utilizar a tância no lugar da distância, já que a tância é uma expressão algébrica simples (envolvendo apenas a forma hermitiana em  $V$ , que é, em última instância, a fonte da geometria em  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}V$ ). Sabemos que a distância é aditiva. Melhor dizendo, ela é sujeita à desigualdade triangular. Expressemos tal desigualdade em termos de tâncias.

Consideramos o caso hiperbólico real. Tome  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $-+++$  e o sinal  $-$  em (4.3.1). Sejam  $p_1, p_2, p_3 \in BV$ . Fixamos representantes tais que  $\langle p_i, p_i \rangle = -1$  e  $r_1, r_2 > 0$ , onde  $r_i := -\langle p_i, p_{i+1} \rangle$  (os índices são módulo 3). Pelo critério de Sylvester,  $r_i^2 \geq 1$  e  $\det \begin{bmatrix} -1 & -r_1 & -r_3 \\ -r_1 & -1 & -r_2 \\ -r_3 & -r_2 & -1 \end{bmatrix} \leq 0$ . Portanto,  $r_i \geq 1$  e

$$(4.5.8) \quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 2r_1r_2r_3 + 1.$$

A desigualdade triangular  $\text{arccosh} r_1 \leq \text{arccosh} r_2 + \text{arccosh} r_3$  é equivalente a

$$r_1 \leq \cosh(\text{arccosh} r_2 + \text{arccosh} r_3) = r_2r_3 + \sqrt{r_2^2 - 1}\sqrt{r_3^2 - 1}$$

(já que  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$  e a função  $\cosh$  é crescente) e segue de  $(r_1 - r_2r_3)^2 \leq (r_2^2 - 1)(r_3^2 - 1)$ . Chegamos a (4.5.8). A desigualdade (4.5.8) é a desigualdade triangular em termos de tâncias. Ela codifica simultaneamente as três desigualdades triangulares envolvendo  $p_1, p_2, p_3$ . A igualdade ocorre exatamente quando  $p_1, p_2, p_3$  pertencem a uma mesma geodésica.

**4.5.9. Exercício.** Prove as desigualdades triangulares para o plano hiperbólico complexo  $BV$  e para os espaços de Fubini-Study.

Em suma: não há necessidade de se lidar com distâncias nas variedades hermitianas em consideração. Tudo o que necessitamos são a tância, a álgebra hermitiana e a descrição sintética de geodésicas introduzida acima. O fato (às vezes tomado como uma definição) de que uma geodésica é uma curva que

localmente minimiza a distância é, sem dúvida, válido em nosso caso. Adiamos a demonstração deste fato até o Apêndice 10A.

**4.5.10. Exercício.** Identifique os discos de Poincaré e de Beltrami-Klein com discos unitários centrados na origem de um plano (de números complexos). Mostre que a aplicação  $z \mapsto \frac{2z}{1+|z|^2}$  é, a menos de um fator de escala, uma isometria.

Nós esquecemos de mencionar mais um tipo de geodésica. Este corresponde a um subespaço  $W \leq V$  cuja forma hermitiana é real, não-nula e degenerada. Apesar de o comprimento de todo segmento contido em tal  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  ser nulo,  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  é uma geodésica *bona fide* (vide Seção 4.7).

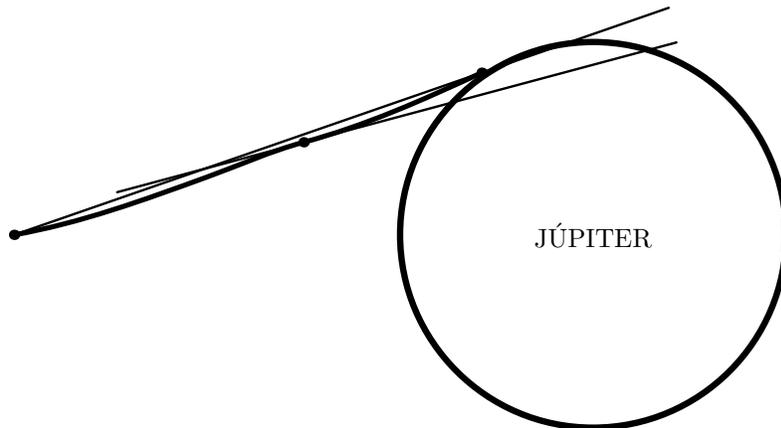
**4.5.11. Dualidade.** A forma hermitiana estabelece uma bijeção entre pontos e geodésicas na plano projetivo de Möbius-Beltrami-Klein: o ponto  $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$  corresponde à geodésica  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}p^{\perp}$ . Se  $p$  é negativo/positivo, então  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}p^{\perp}$  é esférica/hiperbólica. Se  $p$  é isotrópico, então  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}p^{\perp}$  é uma geodésica degenerada (com  $p^{\perp}$  de assinatura  $0+$ ) que é tangente ao absoluto e passa por  $p$ .

Por um lado, uma geodésica hiperbólica é simplesmente um par de pontos distintos no absoluto (seus vértices). Por outro, uma geodésica hiperbólica no disco de Beltrami-Klein é dada por um ponto positivo. Isto significa que a fita de Möbius  $EV$  munida de sua métrica lorentziana descreve a geometria do espaço de geodésicas no disco de Beltrami-Klein.

A dualidade tem aplicações práticas:

Em seu aniversário de  $\frac{\pi}{2}$  anos, Cândido ganhou de presente uma nave espacial. A nave não era lá muito nova. Para falar a verdade, era bem usada. Apesar de não aparentar um OVNI (= Objeto Voador Não-Identificado) de verdade, bem chique e bacana, também não era algo que se devesse xingar de ONVI (= Objeto Não-Voador Identificado).

Cândido decidiu passar férias em Júpiter. Só que a nave tinha alguns pequenos defeitos. O principal era que o volante não estava funcionando direito. O melhor que se podia conseguir era manter a direção da nave de modo que a correspondente reta interceptasse Júpiter. E a gravitação forte daquele planeta só piorava a situação: aproximando-se de Júpiter, o volante tremia cada vez mais, mas ainda era possível manter a direção mencionada.

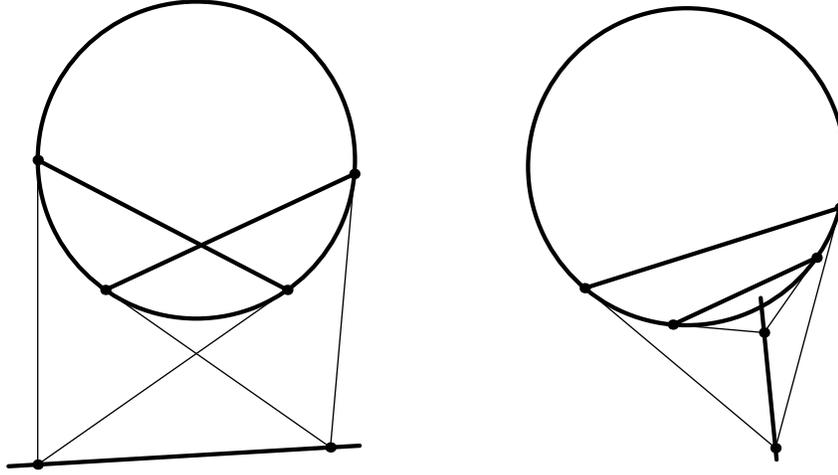


Enquanto Cândido está viajando, vamos resolver o seguinte

**4.5.12. Problema.** Suponhamos que a reta tangente a uma curva suave  $[a, b] \xrightarrow{c} \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}^n$  sempre intercepta uma bola fechada  $\mathbb{B}^n$ . Será que a reta  $R$  ligando  $c(a)$  e  $c(b)$  intercepta  $\mathbb{B}^n$  ?

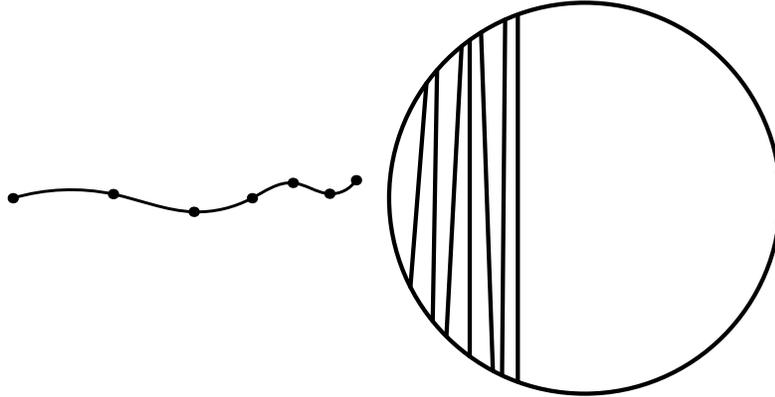
Vamos admitir que a resposta seja positiva no caso de uma bola aberta no lugar de uma bola fechada. Então, a reta  $R$  intercepta qualquer bola aberta  $B$  que contém  $\mathbb{B}^n$ . Logo,  $R$  intercepta a própria  $\mathbb{B}^n$ , de onde segue que podemos lidar com a bola aberta. Por simplicidade, consideramos o caso  $n = 2$ .

A cada ponto  $p$  fora do fecho  $\overline{B}$  do disco aberto  $B$ ,  $p \notin \overline{B}$ , associamos os pontos  $p_1, p_2$  de tangência das retas tangentes a  $\overline{B}$  que passam por  $p$  e denotamos por  $I_p$  os segmento fechado ligando  $p_1, p_2$ .



Sejam  $p, q \notin \overline{B}$ . Então a reta  $R$  ligando  $p, q$  intercepta  $B$  se e só se  $I_p$  e  $I_q$  não se interceptam. (Para demonstrar este fato, considere o caso limite.)

Seja  $T$  uma reta tangente a  $c$ . Já que  $T$  intercepta o disco aberto  $B$ , isto continua a acontecer quando  $T$  é um pouco perturbada. A reta tangente  $T$  é o limite das retas secantes  $S$ . Logo, toda reta secante suficientemente próxima a  $T$  intercepta  $B$ . Deste modo, podemos dividir a trajetória  $c$  em pequenos pedaços tais que qualquer reta ligando dois pontos de um mesmo pedaço intercepta  $B$ . Conseqüentemente, os segmentos  $I_p$  são disjuntos quando  $p$  varia dentro de um mesmo pedaço. Tais segmentos formam uma faixa que separa  $B$  em duas partes disjuntas. A faixa do próximo pedaço tem que ficar numa dessas partes. Agora podemos ver que os segmentos  $I_{c(a)}$  e  $I_{c(b)}$  são bem separados e, portanto, não se interceptam.



Em nossos raciocínios, as retas são geodésicas. O ponto  $p \notin \overline{B}$  é dual à geodésica  $I_p$ .

O ponto  $b$  dual a uma geodésica esférica  $G$  é negativo,  $b \in BV$ . A geodésica esférica  $G$  é formada por todos os pontos que são duais às geodésicas (necessariamente hiperbólicas) que passam por  $b$ . E vice-versa: os pontos positivos de uma geodésica hiperbólica  $G$  são duais às geodésicas hiperbólicas perpendiculares a  $G$  no disco negativo  $BV$ .

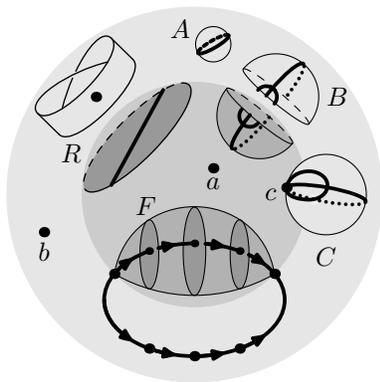
Além disso, entendemos que qualquer quádrlica suave  $Q \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  determina em  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \setminus Q$  geometrias hiperbólica e lorentziana.

Será que tudo isto foi necessário para resolver o Problema 4.5.12 ?

**4.6. Espaço de circunferências.** Nesta seção, lidamos com a esfera de Riemann-Poincaré e estudamos a geometria de subespaços “lineares” da forma  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}W$ , onde  $W \leq V$  é um subespaço  $\mathbb{R}$ -linear 2-dimensional.

Quando  $W$  é um subespaço  $\mathbb{C}$ -linear,  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}W$  é um ponto. E quanto aos outros casos? Nós aprenderemos que os subespaços  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}W$  restantes são geometricamente classificados pela assinatura da forma  $(-, -) := \text{Re}\langle -, - \rangle$  em  $W$ .

**4.7. Zoológico hiperbólico complexo.**



A bola mais escura é o plano hiperbólico complexo  $BV$  e a mais clara é  $EV$ .  
**(a)**, **(b)** e **(c)** são pontos negativos, positivos e isotrópicos no plano hiperbólico complexo estendido. Eles são respectivamente duais às geodésicas complexas **(A)**, **(B)** e **(C)**.  
**(A)** é uma esfera redonda.<sup>12</sup>  
**(B)** é a esfera de Riemann-Poincaré dividida pelo absoluto em dois discos hiperbólicos. Duas geodésicas e os absolutos estão desenhados.  
**(C)** é uma geodésica complexa degenerada. Excluindo-se o ponto isotrópico **(c)**, sua geometria é afim. Duas geodésicas estão desenhadas.  
**(R)** é um plano projetivo de Möbius-Beltrami-Klein (comumente chamado de  $\mathbb{R}$ -plano). O ponto e a geodésica são duais um ao outro dentro do plano (a extensão da geodésica para a fita não está na figura).  
**(F)** é um bisetor. Suas fatias e espinha real estão desenhadas. Toda fatia é um disco hiperbólico (geodésica complexa) dual a um ponto em  $EV$  pertencente à espinha real.

**4.8. Configurações finitas.** Em 1872, Felix Klein concebeu uma ideia brilhante: em geometria, deve-se estudar as propriedades de um espaço que são invariantes pelas simetrias do espaço. Esta visão passou a ser conhecida como o *Programa de Erlangen*. Ela foi, e ainda é, muito revolucionária. Eis alguns exemplos no nível da geometria Euclidiana plana. Estamos acostumados a caracterizar alguns triângulos no plano Euclidiano como sendo iguais<sup>13</sup> enquanto, na verdade, eles não são iguais como subconjuntos do plano. Os triângulos são *geométricamente iguais*, isto é, existe uma simetria do plano (uma bijeção que preserva a geometria) que manda um triângulo sobre o outro. A composta de simetrias e a inversa de uma simetria são simetrias. Em outras palavras, as simetrias constituem um grupo (vide Seção 7 para a definição).

Grosso modo, a geometria não é feita de objetos, mas sim de objetos e movimentos. Os movimentos permitidos variam de caso para caso e, em geral, podemos estudar a geometria de qualquer estrutura. *Isto significa que estamos, na realidade, estudando o grupo de simetrias da estrutura.* Um exemplo simples: estudar a geometria de um conjunto sem impor sobre ele nenhuma estrutura é estudar o grupo de permutações do conjunto. Um exemplo difícil:

<sup>12</sup>Bom, com uma métrica negativo-definida.

<sup>13</sup>É certo que igualdade absoluta não existe no mundo real. Mas ela também não existe no mundo matemático! Você quer dizer que  $1 = 1$  é uma igualdade absoluta? De jeito nenhum! Esta “igualdade” apenas expressa o fato que dois conjuntos de um elemento são equivalentes no sentido que existe uma bijeção entre eles. Por exemplo,  $1 = 1$  não implica que uma pessoa é igual a outra (o que parece ser muito bom!).

*You boil it in sawdust, you salt it in glue  
 You condense it with locusts and tape  
 Still keeping one principal object in view —  
 To preserve its symmetrical shape.*

— LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

No que se segue, pode-se encontrar um exemplo intermediário.

É fácil perceber que as simetrias de um espaço  $\mathbb{K}$ -linear munido de uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  são todos os isomorfismos  $\mathbb{K}$ -lineares  $g : V \rightarrow V$  que preservam  $\langle -, - \rangle$ . Estes constituem o grupo *unitário*

$$UV := \{g \in GLV \mid \langle gv, gv' \rangle = \langle v, v' \rangle \text{ para todos } v, v' \in V\}.$$

A matriz de Gram providencia a classificação geométrica de configurações finitas genéricas em  $V$  (configuração finita = upla finita de pontos) :

**4.8.1. Lema roubado do Carlos.** *Sejam  $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$  e  $w'_1, w'_2, \dots, w'_k \in V$  configurações tais que os subespaços  $W := \mathbb{K}w_1 + \mathbb{K}w_2 + \dots + \mathbb{K}w_k$  e  $W' := \mathbb{K}w'_1 + \mathbb{K}w'_2 + \dots + \mathbb{K}w'_k$  são não-degenerados. Então as configurações são geometricamente iguais, isto é, existe  $g \in UV$  tal que  $gw_i = w'_i$  para todo  $i$ , se e só se suas matrizes de Gram  $G(w_1, w_2, \dots, w_k)$  e  $G(w'_1, w'_2, \dots, w'_k)$  são iguais.*

**Demonstração.** Se um tal  $g$  existe, então  $\langle w'_i, w'_j \rangle = \langle gw_i, gw_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$  para todos  $i, j$  já que  $g \in UV$ . Em outras palavras,  $G(w'_1, w'_2, \dots, w'_k) = G(w_1, w_2, \dots, w_k)$ .

Reciprocamente, suponha que  $G(w_1, w_2, \dots, w_k) = G(w'_1, w'_2, \dots, w'_k)$ . Definimos a aplicação linear  $h : \mathbb{K}^k \rightarrow W$ ,  $h : (c_1, c_2, \dots, c_k) \mapsto \sum_{i=1}^k c_i w_i$ . Obviamente,  $h$  é sobrejetiva. De modo similar, definimos a aplicação linear sobrejetiva  $h' : \mathbb{K}^k \rightarrow W'$ . Provemos que  $\ker h = \ker h'$ . Por simetria, é suficiente mostrar que  $\ker h \subset \ker h'$ . Se  $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in \ker h$ , ou seja, se  $\sum_{i=1}^k c_i w_i = 0$ , então

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^k c_i w_i, w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k c_i \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^k c_i \langle w'_i, w'_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k c_i w'_i, w'_j \right\rangle$$

para todo  $j$ . Sendo  $W'$  não-degenerado, temos  $\sum_{i=1}^k c_i w'_i = 0$ , isto é,  $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in \ker h'$ .

Obtivemos um isomorfismo linear  $l : W \rightarrow W'$  tal que  $lw_i = w'_i$  para todo  $i$ . De  $G(w_1, w_2, \dots, w_k) = G(w'_1, w'_2, \dots, w'_k)$ , segue que  $l$  preserva a forma, isto é,  $\langle lx, ly \rangle = \langle x, y \rangle$  para todos  $x, y \in W$ . Em particular,  $W$  e  $W'$  são da mesma assinatura. Pelo Exercício 6.6, temos decomposições ortogonais  $V = W \oplus W^\perp$  e  $V = W' \oplus W'^\perp$ . Logo,  $W^\perp$  e  $W'^\perp$  são da mesma assinatura. Portanto, existe um isomorfismo linear  $l' : W^\perp \rightarrow W'^\perp$  que preserva a forma. Resta definir  $g : V \rightarrow V$  pela regra  $g : w + u \mapsto lw + l'u$ , onde  $w \in W$  e  $u \in W^\perp$ . ■

**4.8.2.\* Exercício.** Encontre condições necessárias e suficientes para a igualdade geométrica de duas configurações finitas sem a hipótese de que  $W$  e  $W'$  são não-degenerados.

**4.9. Não existe seno<sup>14</sup> ao sul do equador.** A palavra trigonometria significa em grego “medir triângulos”. A típica abordagem para o estudo de triângulos em geometria não-Euclidiana plana consiste em escrever várias identidades que relacionam, via funções trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas tais como  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\text{senh}$ ,  $\text{cosh}$ , etc., os ângulos e os comprimentos dos lados de um triângulo. Desde o ensino médio, estamos acostumados a “resolver” triângulos via trigonometria . . . vejamos como o estudo de configurações finitas em geometrias clássicas desenvolvido na seção anterior pode ajudar a entender de onde vêm as relações trigonométricas.

Começemos com a geometria esférica plana. Como no primeiro dos Exemplos 4.4, seja  $V$  um espaço linear complexo 2-dimensional com uma forma hermitiana  $\langle -, - \rangle$  de assinatura  $++$ . A esfera de Riemann  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  munida da métrica (4.3.1) é a esfera redonda de raio  $\frac{1}{2}$ . Sejam  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}V$  pontos distintos tais que  $\langle p_i, p_j \rangle \neq 0$  para todos  $i, j$ . Eles determinam o triângulo orientado  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  cujo lado  $p_i p_{i+1}$  é o menor segmento de geodésica ligando  $p_i$  e  $p_{i+1}$  (os índices são módulo 3). Em particular,  $l_i := \ell(p_i p_{i+1}) < \frac{\pi}{2}$ . Sabemos do Exercício 4.8.? que existem representantes  $p_1, p_2, p_3 \in V$  com a matriz de Gram  $\begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_3 \varepsilon \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_3 \varepsilon & r_2 & 1 \end{bmatrix}$ , onde  $0 < r_i < 1$  e  $\varepsilon \in \mathbb{C}$ ,  $|\varepsilon| = 1$ . O significado geométrico de cada número nesta matriz é conhecido:  $r_i = \sqrt{\text{ta}(p_i, p_{i+1})}$  e  $\arg \varepsilon = 2 \text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3)$ . Assim, os  $r_i$ 's respondem pelos comprimentos dos lados de  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  enquanto  $\varepsilon$  fornece a área orientada do triângulo. Sendo  $p_1, p_2, p_3$  linearmente dependentes, o determinante da matriz de Gram se anula:

$$(4.9.1) \quad 1 + 2r_1 r_2 r_3 \text{Re } \varepsilon - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 = 0.$$

Esta equação é a única relação entre os invariantes geométricos  $r_1, r_2, r_3, \varepsilon$  (não contando desigualdades). Esta é a identidade *trigonométrica fundamental*, e qualquer outra é derivável desta!

Por exemplo, a *primeira lei dos cossenos* em trigonometria esférica diz que

$$\cos(2l_3) = \cos(2l_1) \cos(2l_2) + \cos \alpha \text{sen}(2l_1) \text{sen}(2l_2)$$

sob a condição  $0 < \alpha < \pi$  para o ângulo interior  $\alpha$  em  $p_2$ . Para deduzir esta lei a partir de (4.9.1), lembramos a relação entre comprimento e tância na geometria esférica:  $l_i = \arccos r_i$  (vide Subseção 4.5.4). Segue que  $\cos(2l_i) = 2r_i^2 - 1$  e  $\text{sen}(2l_i) = 2r_i \sqrt{1 - r_i^2}$ . Logo, a primeira lei dos cossenos é equivalente a

$$(4.9.2) \quad \cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2r_1^2 r_2^2 - 1}{2r_1 r_2 \sqrt{1 - r_1^2} \cdot \sqrt{1 - r_2^2}}.$$

Pelo Exercício 4.5.3, os vetores tangentes

$$t_1 := \langle -, p_2 \rangle \frac{\pi[p_2]p_1}{\langle p_1, p_2 \rangle}, \quad t_2 := \langle -, p_2 \rangle \frac{\pi[p_2]p_3}{\langle p_3, p_2 \rangle}$$

são respectivamente tangentes a  $p_2 p_1$  e a  $p_2 p_3$  em  $p_2$ . Portanto,

$$\cos \alpha = \frac{\text{Re} \langle t_1, t_2 \rangle}{\sqrt{\langle t_1, t_1 \rangle} \cdot \sqrt{\langle t_2, t_2 \rangle}} = \frac{r_3 \text{Re } \varepsilon - r_1 r_2}{\sqrt{1 - r_1^2} \cdot \sqrt{1 - r_2^2}}.$$

Utilizando a identidade trigonométrica fundamental (4.9.1), é fácil ver que a expressão acima é exatamente (4.9.2).

<sup>14</sup>Seria melhor utilizar aqui o anglicismo “sin” se quiséssemos fazer uma referência à conhecida canção de Chico Buarque.

**4.9.3. Exercício.** Derive a *lei dos senos*

$$\frac{\text{sen}(2l_1)}{\text{sen } \alpha_3} = \frac{\text{sen}(2l_2)}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{\text{sen}(2l_3)}{\text{sen } \alpha_2}$$

na geometria esférica plana assumindo que o comprimento  $l_i$  do lado  $p_i p_{i+1}$  e o ângulo interior  $\alpha_i$  no vértice  $p_i$  do triângulo  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  satisfazem as desigualdades  $0 < l_i < \frac{\pi}{2}$  e  $0 < \alpha_i < \pi$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**4.9.4. Exercício.** Seja  $\Delta(p_1, p_2, p_3)$  um triângulo na esfera de Riemann-Poincaré com vértices distintos, não-isotrópicos e de mesma assinatura. Escreva a identidade trigonométrica fundamental para o triângulo e derive a *primeira* e a *segunda leis dos cossenos* assim como a *lei dos senos* em geometria hiperbólica:

$$\cosh(2l_3) = \cosh(2l_1) \cosh(2l_2) - \cos \alpha_2 \sinh(2l_1) \sinh(2l_2),$$

$$\cos \alpha_2 + \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 = \cosh(2l_3) \text{sen } \alpha_2 \text{sen } \alpha_3,$$

$$\frac{\sinh(2l_1)}{\text{sen } \alpha_3} = \frac{\sinh(2l_2)}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{\sinh(2l_3)}{\text{sen } \alpha_2},$$

onde  $l_i$  denota o comprimento do lado  $p_i p_{i+1}$  e  $\alpha_i$  denota o ângulo interior em  $p_i$  (os índices são módulo 3). Estude a trigonometria dos triângulos com as outras assinaturas de vértices (incluindo vértices isotrópicos).

**4.10A. Geometria no absoluto.**

**4.11. Um pouco de história.** Em 1820, o matemático húngaro de então dezoito anos de idade János Bolyai começou a escrever um tratado sobre geometria não-Euclidiana. Seu pai, Farkas Bolyai, havia ele próprio lutado em vão com o postulado das paralelas durante muitos anos. Farkas Bolyai não mediu esforços em tentar dissuadir seu filho de seguir o que ele imaginava ser um caminho sem esperança:

*“Você não deve tentar esta abordagem às paralelas. Conheço este caminho até o fim. Eu atravessei esta noite sem fundo, que extinguiu toda a luz a alegria da minha vida. Eu te suplico, deixe a ciência das paralelas de lado . . . Pensei que iria sacrificar-me em nome da verdade. Eu estava pronto para me tornar um mártir que iria remover a falha da geometria e devolvê-la purificada para a humanidade. Realizei trabalhos monstruosos, enormes; minhas criações são muito melhores que as de outros e ainda assim eu não obtive a satisfação completa . . . Eu tornei atrás quando vi que nenhum homem pode alcançar o fundo da noite. Tornei atrás inconsolável, lamentando por mim e por toda a humanidade.*

*Admito que espero pouco da variante em suas linhas. Parece-me que estive nessas regiões; que eu viajei além de todos os recifes deste Mar Morto infernal e sempre voltei com o mastro quebrado e a vela rasgada. A ruína da minha disposição e minha queda datam desta época. Eu impensadamente arrisquei minha vida e felicidade — aut Caesar aut nihil.”*

Ainda assim, János teve coragem suficiente para perseguir suas ideias. E onde muitos falharam, o jovem gênio teve sucesso . . . Ele escreveu para seu pai:

*“É agora meu plano definitivo publicar um trabalho sobre paralelas tão logo eu consiga completar e arrumar o material e uma oportunidade se apresente . . . Eu descobri coisas tão maravilhosas que fiquei atônito, e seria um infortúnio eterno se elas se perdessem. Quando você, meu caro Pai, vê-las, entenderá; no momento não posso dizer nada além disso: que a partir de nada eu criei um estranho novo universo. Tudo o que te mandei anteriormente é como uma casa de cartas em comparação com uma torre. Não estou menos convencido agora de que estas descobertas me trarão honra do que eu estaria se elas estivessem completas.”*

Naturalmente, János desejava apresentar suas descobertas para o matemático dos matemáticos, o *princeps mathematicorum*, Carl Friedrich Gauss. Acontece que Farkas Bolyai era um velho amigo de Gauss, e a oportunidade que János tão ansiosamente procurava estava bem na frente dele: seu pai escreveria uma carta a Gauss e comunicaria os grandes feitos de seu filho. Não podia ser melhor.

Finalmente, uma resposta de Gauss para Farkas chegou:

*“Se eu começar com a declaração de que eu não me atrevo a louvar tal trabalho, você irá com certeza ficar chocado por um momento:”*

Por que não louvar meu trabalho? — pensou János. É possível que tudo está errado? Será que eu, como muitos, caí em alguma das elusivas armadilhas que circundam as paralelas? Não, não pode ser!

*“mas não posso fazer diferente;” — continuou Gauss — “louvá-lo seria como louvar a mim mesmo; pois todo o conteúdo do trabalho, o caminho que o seu filho tomou, os resultados aos quais ele é levado, coincidem quase que exatamente com minhas próprias meditações que ocuparam minha mente dos trinta aos trinta e cinco anos.”*

Aquilo definitivamente não era justo! — pensou János — Não poderia Gauss reconhecer honestamente e definitivamente o meu trabalho? Francamente, não é esta atitude a que chamamos vida, trabalho e mérito. János estava tão profundamente desapontado que nunca pôde recuperar-se completamente deste episódio.

Era uma tarde chuvosa, 17 de outubro de 1841, quando János recebeu de seu pai uma brochura intitulada, para sua surpresa, “Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien” (Investigações geométricas sobre a teoria de retas paralelas). János era um poliglota que falava perfeitamente nove línguas estrangeiras. Ler alemão não era um desafio para ele. O autor da brochura? Um certo professor

russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky. Quanto mais János lia da brochura, mais intrigado ficava. Todas as suas queridas descobertas, as grandes descobertas pelas quais ninguém jamais o reconheceria, estavam todas lá ... sem dúvida, o trabalho em suas mãos era uma obra-prima. János fechou a brochura e a deixou na mesa. Ele deu alguns passos para trás e olhou a brochura por um momento. Um professor russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky ... que escreve um texto maravilhoso em alemão sobre geometria não-Euclidiana ... Os olhos de János ficaram injetados de ódio e ele esmurrou a mesa furiosamente. Esta é a gota d'água! — gritou. A suspeita máxima de János, naturalmente, é que nenhum professor Lobachevsky jamais existira e que a brochura era nada mais do que um trabalho de Gauss.

**4.11.1. Referências.** Para a correspondência entre Farkas Bolyai e János Bolyai, vide [Mes]. Para a história sobre a brochura, vide [Kag, p. 391, l. 13–15]. Para a correspondência de Gauss, vide [Sch].

[Kag] Kagan, V. F., *Lobachevsky*, edição da Academia de Ciências da URSS, Moscou-Leningrado, 1948 (em russo)

[Mes] Meschkowski, H., *Evolution of mathematical thought*, Holden-Day, São Francisco, 1965

[Sch] Schmidt, F., Stäckel, P., *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, Johnson Reprint Corp. New York, 1972 (em alemão)

## 5. Superfícies de Riemann

### 5.1. Recobrimento regular e grupo fundamental.

### 5.2. Grupos discretos e teorema poligonal de Poincaré.

### 5.3. Espaço de Teichmüller.

## 6. Apêndice: Largo al factotum della citta

Se você deixa a Universidad de Sevilla e caminha pela rua Calle Palos de la Frontera (em direção à Plaza de España), pode inesperadamente ouvir a melodia

*Rasori e pettini  
lancette e forbici  
al mio comando  
tutto qui sta.*<sup>15</sup>

vinda do interior de uma barbearia. Ela soa tão familiar que você decide entrar. O barbeiro se introduz:

- Ciao, mi chiamo Figaro, il barbiere-factotum.<sup>16</sup>
- Olá, sou um estudante de matemática aqui na universidade.
- Hum, um matemático ... Os matemáticos costumam me procurar somente por duas razões ...
- Figaro parece incomodado.
- ... eles não sabem como resolver o Paradoxo do Barbeiro<sup>17</sup> ...
- ... ou eles não conseguem resolver seus problemas porque não conhecem as ferramentas lineares, como a Álgebra Linear! Isto para não dizer nada das Ferramentas Hermitianas! — Figaro agora está furioso.

Você pode ficar confuso. É algo compreensível que os matemáticos procurem o barbeiro para se convencer de sua existência. Mas ...

- Por que diabos um ignorante em Álgebra Linear iria procurar você?
- Não saber Álgebra Linear é uma barbaridade. E eu sou um barbeiro, o que você espera? Sente-se e deixe-me te introduzir às ferramentas lineares e hermitianas:

*Rasori e pettini  
lancette e forbici  
al mio comando  
tutto qui sta.*

Lidamos com espaços lineares de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Para abranger ambos os casos, denotamos os escalares por  $\mathbb{K}$ . O símbolo  $\bar{k}$  denota o *conjugado* ao número (complexo)  $k \in \mathbb{K}$ .

**6.1. Definição.** Seja  $V$  um espaço  $\mathbb{K}$ -linear. Uma *forma hermitiana* é uma aplicação  $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  linear em  $x$  e tal que  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  para todos  $x, y \in V$ . Em outras palavras, a forma é *1.5-linear* pois  $\langle kx, y \rangle = k\langle x, y \rangle$  e  $\langle x, ky \rangle = \bar{k}\langle x, y \rangle$  para todo  $k \in \mathbb{K}$ . Se  $W \leq V$  é um subespaço, então podemos restringir a forma  $\langle -, - \rangle$  para  $W$ , obtendo um espaço linear  $W$  munido da forma hermitiana *induzida*.

**6.2. Definição.** Seja  $V$  um espaço linear munido de uma forma hermitiana e seja  $W \leq V$  um subespaço. Definimos  $W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, W \rangle = 0\}$ , o *ortogonal* a  $W$ . Chamamos  $V^\perp$  o *núcleo* da forma em  $V$ . Se o núcleo é nulo, dizemos que a forma é *não-degenerada*. Se a forma induzida em um subespaço  $W \leq V$  é não-degenerada,  $W$  é dito *não-degenerado*. Para  $U, W \leq V$ , o *ortogonal* de  $W$  relativo a  $U$  é dado por  $W^{\perp U} := W^\perp \cap U$ .

**6.3. Exercício.** Mostre que  $W^\perp \leq V$  e  $W \subset W^{\perp \perp}$  para todo  $W \leq V$ . Prove também que  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$  para todos  $W_1, W_2 \leq V$ . A identidade  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$  é válida?

<sup>15</sup>Navalhas e pentes/lâminas e tesouras/à minha disposição/tudo aqui está.

<sup>16</sup>Olá, chamo-me Figaro, o barbeiro faz-tudo.

<sup>17</sup>Também conhecido como Paradoxo de Russell (Bertrand Russell, filósofo e matemático britânico) : Quem barbeia o barbeiro que barbeia apenas os homens que não se barbeiam?

**6.4. Exercício.** Defina a forma induzida em  $V/V^\perp$  e verifique que esta definição é correta. Mostre que  $V/V^\perp$  é não-degenerado. Decompondo  $V = V^\perp \oplus W$ , prove que os espaços  $V/V^\perp$  e  $W$  munidos das formas induzidas são naturalmente isomorfos.

**6.5. Exercício.** Para  $W \leq V$ , mostre que  $\dim W + \dim W^\perp \geq \dim V$ .

**6.6. Exercício.** Mostre que  $V = W \oplus W^\perp$  para todo subespaço não-degenerado  $W \leq V$ .

**6.7. Exercício.** Suponha que ambos  $W$  e  $V$  são não-degenerados, onde  $W \leq V$ . Prove que  $W^{\perp\perp} = W$ .

**6.8. Exercício.** Suponha que ambos  $W$  e  $V$  são não-degenerados, onde  $W \leq V$ . Mostre que  $W^\perp$  é não-degenerado.

**6.9. Exercício.** Mostre que existe um elemento *não-isotrópico*  $v \in V$ , isto é,  $\langle v, v \rangle \neq 0$ , se  $\langle -, - \rangle \neq 0$ .

**6.10. Exercício.** Suponha que ambos  $W$  e  $V$  são não-degenerados, onde  $W \not\leq V$ . Mostre que existe um subespaço não-degenerado  $W' \leq V$  tal que  $W \leq W'$  e  $\dim W' = \dim W + 1$ .

**6.11. Definição.** Uma *bandeira* de subespaços é uma cadeia de subespaços  $V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_n$  tal que  $V_n = V$  e  $\dim V_i = i$  para todo  $i$ . Se  $V$  está munido de uma forma hermitiana, uma bandeira é *não-degenerada* quando todos os  $V_i$ 's são não-degenerados.

**6.12. Exercício.** Mostre que todo espaço linear não-degenerado admite uma bandeira não-degenerada de subespaços.

**6.13. Definição.** Uma base linear  $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$  é *ortonormal* se  $\langle b_i, b_i \rangle \in \{-1, 0, 1\}$  e  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$  para todos  $i$  e  $j$  tais que  $i \neq j$ . Denote por  $\beta_-, \beta_0, \beta_+$  a quantidade de elementos na base  $\beta$  tais que  $\langle b_i, b_i \rangle = -1$ ,  $\langle b_i, b_i \rangle = 0$ ,  $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ , respectivamente. A tripla  $(\beta_-, \beta_0, \beta_+)$  é a *assinatura* da base.

**6.14. Exercício.** Seja  $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$  uma base ortonormal em  $V$ . Mostre que  $\beta_0$  é a dimensão do núcleo da forma em  $V$ ,  $\beta_0 = \dim V^\perp$ .

**6.15. Ortogonalização de Gram-Schmidt.** Seja  $V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_n$  uma bandeira não-degenerada de subespaços em  $V$ . Então existe uma base ortonormal  $b_1, b_2, \dots, b_n$  em  $V$  tal que  $b_1, b_2, \dots, b_k$  é uma base em  $V_k$  para todo  $k$ .

**Demonstração.** Indução em  $n$ . Para  $n = 1$ , simplesmente tomamos algum  $0 \neq c_1 \in V_1$  e o normalizamos:  $b_1 := \frac{c_1}{\sqrt{|\langle c_1, c_1 \rangle|}}$ . (Sendo  $V_1$  não-degenerado,  $\langle c_1, c_1 \rangle \neq 0$ .) Suponha que, para algum

$k < n$ , já tenhamos encontrado uma base ortonormal  $b_1, b_2, \dots, b_k$  em  $V_k$  tal que  $b_1, b_2, \dots, b_i$  é uma base em  $V_i$  para todo  $i \leq k$ . Escolhemos  $c_{k+1} \in V_{k+1} \setminus V_k$  e colocamos  $c'_{k+1} = c_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle c_{k+1}, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} b_i$ .

Levando em conta que os  $b_i$ 's são ortogonais, um cálculo direto mostra que  $\langle c'_{k+1}, b_i \rangle = 0$  para todo  $i \leq k$ . Se  $c'_{k+1}$  fosse isotrópico, então pertenceria ao núcleo da forma em  $V_{k+1}$ . Portanto,  $c'_{k+1}$  é não-isotrópico e podemos normalizar  $c'_{k+1}$ , obtendo o  $b_{k+1}$  desejado ■

**6.16. Corolário.** Todo espaço linear com uma forma hermitiana admite uma base ortonormal.

**Demonstração.** Pelo Exercício 6.4, podemos assumir que o espaço  $V$  é não-degenerado. Utilizando o Exercício 6.10, podemos contruir uma bandeira não-degenerada de subespaços em  $V$ . Agora, o resultado segue de 6.15 ■

**6.17. Definição.** Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ . A matriz  $G := G(v_1, v_2, \dots, v_k) := [g_{ij}]$ , onde  $g_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ , é chamada a matriz de *Gram* de  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .

Obviamente,  $\overline{G}^t = G$ , onde  $M^t$  denota a matriz transposta de  $M$  e  $\overline{M}$  denota a matriz  $M$  com entradas conjugadas. Em outras palavras,  $G$  é *hermitiana* (*simétrica*).

A matriz de Gram  $G^{\beta\beta} := G(b_1, b_2, \dots, b_n)$  de uma base  $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$  em  $V$  determina a forma hermitiana em  $V$  já que  $\langle v, v' \rangle = [v]_\beta^t G^{\beta\beta} [v']_\beta$  para todos  $v, v' \in V$ , onde  $[v]_\beta$  denota a matriz coluna cujas entradas são os coeficientes  $c_i$  que aparecem na combinação linear  $v = \sum_{i=1}^n c_i b_i$ . De fato, se  $v = \sum_{i=1}^n c_i b_i$  e  $v' = \sum_{i=1}^n c'_i b_i$ , então  $\langle v, v' \rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i \langle b_i, b_j \rangle \overline{c'_j} = \sum_{i,j=1}^n c_i g_{ij} \overline{c'_j}$ . Uma base é ortonormal se e só se sua matriz de Gram é diagonal com entradas  $-1, 0, 1$  na diagonal. Enfatizamos que toda matriz hermitiana é a matriz de Gram de uma base em um certo espaço linear com uma forma hermitiana apropriada.

Seja  $\alpha : a_1, a_2, \dots, a_n$  uma outra base em  $V$  e seja  $M_\alpha^\beta = [m_{ij}]$  a matriz representando a mudança de base de  $\alpha$  para  $\beta$ , ou seja,  $b_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} a_i$  para todo  $j$ . Então

$$g_{kl} = \langle b_k, b_l \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n m_{ik} a_i, \sum_{j=1}^n m_{jl} a_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n m_{ik} \langle a_i, a_j \rangle \overline{m_{jl}} = \sum_{i,j=1}^n m_{ik} f_{ij} \overline{m_{jl}},$$

onde  $G^{\alpha\alpha} = [f_{ij}]$ . Obtemos a relação  $G^{\beta\beta} = (M_\alpha^\beta)^t G^{\alpha\alpha} \overline{M_\alpha^\beta}$ . Em particular, segue que o sinal de  $\det G^{\beta\beta}$  não depende da escolha da base já que

$$\det G^{\beta\beta} = \det(M_\alpha^\beta)^t \det G^{\alpha\alpha} \det \overline{M_\alpha^\beta} = \det M_\alpha^\beta \det G^{\alpha\alpha} \det \overline{M_\alpha^\beta} = |\det M_\alpha^\beta|^2 \det G^{\alpha\alpha}.$$

**6.18. Lema.** *Seja  $G^{\beta\beta}$  a matriz de Gram de uma base em um espaço linear  $V$ . Então  $V$  é degenerado se e só se  $\det G^{\beta\beta} = 0$  ■*

**6.19. Exemplo.** Sejam  $V \ni e, f$  tais que  $\langle e, e \rangle > 0 > \langle f, f \rangle$ . Seja  $W := \mathbb{K}e + \mathbb{K}f$ . Então  $\dim W = 2$  e toda base ortonormal em  $W$  tem assinatura  $(1, 0, 1)$ . Ainda mais,  $W$  contém elementos isotrópicos (não-nulos).

De fato, podemos tomar  $W = V$ . Se  $0 \neq n \in V^\perp$ , então  $V = \mathbb{K}b + \mathbb{K}n$  para algum  $b \in V$ . Assumindo  $\langle b, b \rangle \geq 0$  obtemos  $\langle v, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in V$  e assumindo  $\langle b, b \rangle \leq 0$  obtemos  $\langle v, v \rangle \leq 0$  para todo  $v \in V$ . Ambos os casos são impossíveis porque  $V$  contém um elemento positivo e um elemento negativo. Por uma razão similar,  $\dim V = 2$ . Tomando uma base ortonormal  $\beta$  em  $V$ , é fácil ver que a assinatura de tal base é distinta de  $(2, 0, 0)$  (já que  $V$  contém um elemento positivo) e de  $(0, 0, 2)$  (já que  $V$  contém um elemento negativo). Pelo Exercício 6.14,  $\beta_0 = 0$ . Logo, a assinatura é  $(1, 0, 1)$ . Obviamente, a soma dos elementos da base ortonormal é um elemento isotrópico.

**6.20. Lei da inércia de Sylvester.** *A assinatura não depende da escolha de uma base ortonormal.*

**Demonstração.** Indução em  $\dim V$ . Pelos Exercícios 6.4 e 6.14, podemos assumir que  $V$  é não-degenerado. Sejam  $\beta : b_1, b_2, \dots, b_n$  e  $\beta' : b'_1, b'_2, \dots, b'_n$  bases ortonormais. Assim,  $\beta_0 = \beta'_0 = 0$  pelo Exercício 6.14. Se  $\beta_- = 0$ , então  $\langle v, v \rangle \geq 0$  para todo  $v \in V$ , implicando que  $\beta'_- = 0$ . Do mesmo modo,  $\beta_+ = 0$  implica que  $\beta'_+ = 0$ . Portanto, podemos assumir que  $\langle b_n, b_n \rangle = 1$  e  $\langle b'_n, b'_n \rangle = -1$ . Definimos

$$W := \mathbb{K}b_n + \mathbb{K}b'_n, \quad U := (\mathbb{K}b_n)^\perp, \quad U' = (\mathbb{K}b'_n)^\perp.$$

É fácil ver que  $U = \mathbb{K}b_1 + \mathbb{K}b_2 + \dots + \mathbb{K}b_{n-1}$  e  $U' = \mathbb{K}b'_1 + \mathbb{K}b'_2 + \dots + \mathbb{K}b'_{n-1}$ . Portanto, as assinaturas das bases indicadas em  $U$  e  $U'$  são respectivamente  $(\beta_-, 0, \beta_+ - 1)$  e  $(\beta'_- - 1, 0, \beta'_+)$ . Pelo Exercício 6.3,  $W^\perp = U \cap U'$ . Pelos Exemplo 6.19 e Exercício 6.14,  $W$  é não-degenerado. Logo,  $U \cap U'$  é não-degenerado

pelo Exercício 6.8. Aplicando o Exercício 2.6 aos espaços  $U$  e  $U'$  e ao subespaço  $U \cap U'$ , obtemos as decomposições ortogonais  $U = (U \cap U') \oplus (U \cap U')^{\perp U}$  e  $U' = (U \cap U') \oplus (U \cap U')^{\perp U'}$ . Utilizando o Corolário 6.16, escolhamos uma base ortonormal  $\alpha$  em  $U \cap U'$ . Sejam  $\gamma$  e  $\gamma'$  bases ortonormais respectivamente em  $(U \cap U')^{\perp U}$  e  $(U \cap U')^{\perp U'}$ . Portanto,  $\alpha \sqcup \gamma$  e  $\alpha \sqcup \gamma'$  são bases ortonormais respectivamente em  $U$  e  $U'$ . Calculando as assinaturas, obtemos

$$(\beta_-, 0, \beta_+ - 1) = ((\alpha \sqcup \gamma)_-, (\alpha \sqcup \gamma)_0, (\alpha \sqcup \gamma)_+) = (\alpha_-, \alpha_0, \alpha_+) + (\gamma_-, \gamma_0, \gamma_+),$$

$$(\beta'_- - 1, 0, \beta'_+) = ((\alpha \sqcup \gamma')_-, (\alpha \sqcup \gamma')_0, (\alpha \sqcup \gamma')_+) = (\alpha_-, \alpha_0, \alpha_+) + (\gamma'_-, \gamma'_0, \gamma'_+)$$

já que as assinaturas não dependem das escolhas de bases ortogonais em  $U$  e  $U'$  pela hipótese de indução. Resta mostrar que  $(U \cap U')^{\perp U} = (\mathbb{K}b_n)^{\perp W}$  e que  $(U \cap U')^{\perp U'} = (\mathbb{K}b'_n)^{\perp W}$  uma vez que isto implica que  $(\gamma_-, \gamma_0, \gamma_+) = (1, 0, 0)$  e  $(\gamma'_-, \gamma'_0, \gamma'_+) = (0, 0, 1)$  pelo Exemplo 2.19.

Sendo  $W$  e  $V$  não-degenerados,  $(U \cap U')^{\perp U} = (U \cap U')^{\perp} \cap U = W^{\perp \perp} \cap U = W \cap (\mathbb{K}b_n)^{\perp} = (\mathbb{K}b_n)^{\perp W}$  pelo Exercício 6.7. Pela mesma razão,  $(U \cap U')^{\perp U'} = (\mathbb{K}b'_n)^{\perp W}$  ■

Podemos agora falar da *assinatura* de um espaço. Como a medir? Pelo Exercício 6.14,  $\beta_0 = \dim V^{\perp}$ . Utilizando o Exercício 6.4, o problema pode ser reduzido ao caso de um  $V$  não-degenerado. Seja  $\gamma : c_1, c_2, \dots, c_n$  uma base em  $V$  com uma matriz de Gram  $G^{\gamma\gamma}$  conhecida. Queremos encontrar a assinatura de  $V$  em termos de  $G^{\gamma\gamma}$ . Definindo  $V_k := \mathbb{K}c_1 + \mathbb{K}c_2 + \dots + \mathbb{K}c_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , obtemos uma bandeira de subespaços. Obviamente, a matriz de Gram da base  $c_1, c_2, \dots, c_k$  em  $V_k$  é a  $(k \times k)$ -submatriz  $G_k^{\gamma\gamma}$  (chamada uma submatriz *principal*) formada pelas primeiras  $k$  linhas e pelas primeiras  $k$  colunas de  $G^{\gamma\gamma} = G_n^{\gamma\gamma}$ . Assumimos que a bandeira é não-degenerada. Pelo Lema 6.18, isto é equivalente a  $\det G_k^{\gamma\gamma} \neq 0$  para todo  $1 \leq k \leq n$ . Aplicamos<sup>18</sup> a Ortogonalização 6.15 à bandeira e observamos que os sinais dos determinantes  $\det G_k^{\gamma\gamma}$  relativos às bases  $b_1, b_2, \dots, b_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$  não se alteram quando aumentamos  $k$  já que os primeiros  $l$  elementos em  $b_1, b_2, \dots, b_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$  constituem uma base em  $V_l$  para todo  $l$ . Quando atingimos uma base ortonormal, a assinatura pode ser medida como se segue:

**6.21. Critério de Sylvester.** Se  $\det G_k^{\gamma\gamma} \neq 0$  para todo  $1 \leq k \leq n$ , então a assinatura do espaço é igual a  $(n_-, 0, n_+)$ , onde  $n_-$  é a quantidade de números negativos na sequência

$$\det G_1^{\gamma\gamma}, \quad \frac{\det G_2^{\gamma\gamma}}{\det G_1^{\gamma\gamma}}, \quad \frac{\det G_3^{\gamma\gamma}}{\det G_2^{\gamma\gamma}}, \quad \dots, \quad \frac{\det G_n^{\gamma\gamma}}{\det G_{n-1}^{\gamma\gamma}}$$

e  $n_+$  é a quantidade de números positivos nesta mesma sequência ■

**6.22.\* Exercício.** Encontre um critério sem a hipótese  $\det G_k^{\gamma\gamma} \neq 0$  para todo  $k$ .

Os Exercícios 6.23–26 são referentes ao estudo de possíveis assinaturas de um subespaço quando a assinatura do espaço é dada. Note que dois espaços da mesma assinatura admitem um isomorfismo entre si que preserva a forma.

**6.23. Exercício.** Seja  $V$  um espaço de assinatura  $(n_-, n_0, n_+)$ . Mostre que  $V$  contém um subespaço  $W$  de assinatura  $(m_-, m_0, m_+)$  se e só se o espaço  $V/V^{\perp}$  (de assinatura  $(n_-, 0, n_+)$ ) possui um subespaço de assinatura  $(m_-, m_0 - m, m_+)$  para algum  $m$  tal que  $0 \leq m \leq n_0$ .

**6.24. Exercício.** Seja  $V$  um espaço de assinatura  $(n_-, 0, n_+)$ . Mostre que  $\min(n_-, n_+)$  é a maior dimensão possível de um subespaço  $W$  com forma induzida nula.

<sup>18</sup>Como normalmente acontece, a demonstração é mais importante do que o próprio fato.

**6.25. Exercício.** Seja  $V$  um espaço de assinatura  $(n_-, 0, n_+)$ . Mostre que  $V$  contém um subespaço  $W$  de assinatura  $(m_-, m_0, m_+)$  se e só se

$$m_- \leq n_-, \quad m_+ \leq n_+, \quad m_0 \leq n_- - m_-, \quad m_0 \leq n_+ - m_+.$$

**6.26. Exercício.** Seja  $V$  um espaço de assinatura  $(n_-, n_0, n_+)$ . Mostre que  $V$  contém um subespaço de assinatura  $(m_-, m_0, m_+)$  se e só se

$$m_- \leq n_-, \quad m_+ \leq n_+, \quad m_- + m_0 \leq n_- + n_0, \quad m_0 + m_+ \leq n_0 + n_+.$$

## 7. Apêndice: Álgebra básica e topologia

### 8. Apêndice: Classificação de superfícies compactas

### 9A. Apêndice: Geometria riemanniana

### 10A. Apêndice: Superfícies hiperelípticas e teorema de Goldman

### Dicas

**1.2.** A pergunta não faz sentido.

**2.3.** Desenhe duas retas distintas  $L_1, L_2$  passando por  $p$  que não são paralelas a  $R_1, R_2$  e denote as interseções  $\{q_{ij}\} = R_i \cap L_j$ . Ligando  $q_{11}, q_{22}$  e  $q_{12}, q_{21}$ , nós obtemos respectivamente as retas  $D_1$  e  $D_2$ . Elas interceptam-se em  $\{d\} = D_1 \cap D_2$ . Denotando  $\{q_i\} = R_i \cap L$ , onde  $L$  é a reta ligando  $p$  e  $d$ , podemos construir as retas  $S_1$  e  $S_2$  que ligam respectivamente  $q_1, q_{22}$  e  $q_{11}, q_2$ . Afirmamos que a interseção  $\{q\} = S_1 \cap S_2$  vive na reta  $R$  desejada. Para provar este fato, escolha a reta ligando  $p$  e  $b$  como sendo o infinito, onde  $\{b\} = R_1 \cap R_2$ .

**2.5.** Volte a este exercício após estudar o plano de Beltrami-Klein (vide 4.5.11).

**2.10.** Por indução na dimensão, é suficiente lidar com subesferas de codimensão 1. Uma tal subesfera pode ser descrita como  $S := \{q \in \mathbb{S}^n \mid fq = \varepsilon\}$ , onde  $0 \neq f \in V^* := \text{Lin}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  e  $\varepsilon = 0, 1$ . Resta observar que  $\varsigma_p^{-1}(v) \in S$  é equivalente a  $(\varepsilon - f(-p))\langle v, v \rangle - 2fv + \varepsilon + f(-p) = 0$ .

**2.11.** Volte a este exercício após estudar os elementos de geometria riemanniana. O vetor  $\langle -, v \rangle q \in T_q \mathbb{S}^n$ , onde  $v \in q^\perp$ , é tangente à curva  $c(t) := q + tv \in V^*$  em  $c(0) = q$ . Uma vez que a definição de  $\varsigma_p$  no Exercício 2.8 funciona em uma vizinhança aberta de  $q$  em  $V^*$ , obtemos

$$\varsigma_p \langle -, v \rangle q = \frac{(1 + \langle q, p \rangle)v - \langle v, p \rangle(q + p)}{(1 + \langle q, p \rangle)^2}.$$

Conseqüentemente,  $\langle \varsigma_p \langle -, v_1 \rangle q, \varsigma_p \langle -, v_2 \rangle q \rangle = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|1 + \langle q, p \rangle|^2}$  para  $v_1, v_2 \in q^\perp$ .

**3.3.2.** Sejam  $f \in C^1(U)$  e  $p \in U$ . Pelo teorema do valor médio, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe  $\varepsilon' \in [0, \varepsilon]$  tal que  $\frac{f(p + \varepsilon v) - f(p)}{\varepsilon} = v_{p+\varepsilon'} f$ . Logo,  $\frac{f(p + \varepsilon w + \varepsilon v) - f(p + \varepsilon w)}{\varepsilon} = v_{p+\varepsilon w + \varepsilon' v} f$  para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e um adequado  $\varepsilon' \in [0, \varepsilon]$ . Obtemos

$$\frac{f(p + \varepsilon v + \varepsilon w) - f(p)}{\varepsilon} = v_{p+\varepsilon w + \varepsilon' v} f + \frac{f(p + \varepsilon w) - f(p)}{\varepsilon}.$$

Já que  $v_q f$  é contínuo em  $q \in U$ , segue que  $(v + w)_p f = v_p f + w_p f$ .

**3.3.3.** Para alguns  $p \in U \subset M$  e  $f \in C^\infty(U)$ , temos  $g = f_p$ . A aplicação  $\varphi : v \mapsto v_p f$  (esta definição é correta uma vez que é independente da escolha de  $f$  representando  $g$ ; logo, podemos escrever  $v_p g$ ) é um funcional  $\mathbb{K}$ -linear pelo Exercício 3.3.2. Segue da regra de Leibniz que  $v_p h = 0$  para todos  $v \in V$  e  $h \in \mathfrak{m}_p^2$ , implicando a unicidade.

Seja  $b^i \in V$  uma base linear em  $V$  e seja  $\varphi_i \in V^*$  a correspondente base dual. Então, pela fórmula de Newton-Leibniz,  $f(v) = f(p) + \sum_i \varphi_i(v - p) f_i(v - p)$ , onde  $f_i(w) := \int_0^1 b_{p+tw}^i f dt$  é uma função suave em  $w$  para  $w$  suficientemente perto de 0. Resta aplicar as mesmas fórmulas para as funções  $f_i(v - p)$  em  $v$ .

**3.3.4.** Primeiro mostre que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela regra  $f(x) := 0$  para  $x \leq 0$  e  $f(x) := \exp(-\frac{1}{x})$  para  $x > 0$  é suave. Então, assumindo que  $V$  é Euclidiano, note que  $g^{-1}(\mathbb{R}^+)$  é a bola aberta de raio  $r$  centrada em  $c$ , onde  $g(v) := f(r^2 - \langle v - c, v - c \rangle)$  para todo  $v \in V$ .

**3.6.6.** Há um homomorfismo  $h : \mathcal{F}_p \rightarrow (\mathcal{F}|_S)_p$  dado pela regra  $f_p \mapsto (f|_{S \cap U})_p$ , onde  $f \in \mathcal{F}(U)$  e  $p \in U \subset M$ . Pela definição de estrutura induzida,  $h$  é sobrejetivo. Resta observar que  $\ker h = \{f_p \in \mathcal{F}_p \mid f \in \mathcal{F}(U), f(S \cap U) = 0 \text{ para algum } p \in U \subset M\}$ .

**4.3.3.** Mostre que  $\frac{\text{sen}(2l_3)}{\text{sen } \alpha_2}$  é simétrico em  $r_1, r_2, r_3$ .

**4.4.1.** Utilize coordenadas ortogonais.

**4.5.2.** Se  $\langle p_1, p_2 \rangle \neq 0$ , tomamos  $W := \mathbb{R}p_1 + \mathbb{R}\langle p_1, p_2 \rangle p_2$ . Sejam  $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$  e  $p_1 \in W \leq V$ , onde  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}W$  é uma geodésica. Então  $\pi[p_1]p \in W$  e  $p_2 = \pi[p_1]p$  para um adequado  $p \in W$ .

**4.5.9.** Vide Exercício 4.8.?

**4.5.12.** Denotamos por  $C_p$  o cone tangente a  $\mathbb{B}^n$  com o vértice em  $p$ . Mostre que  $C_q \subset C_p$  se  $q \in C_p$ .

**4.8.2.** Roubar algo da demonstração do Lema roubado do Carlos é útil, mas ainda não é suficiente.

**6.5.** Por indução em  $\dim W$ , decomponha  $W = W' \oplus \mathbb{K}w$ . Sendo  $W'^{\perp} \cap (\mathbb{K}w)^{\perp}$  o núcleo do funcional  $W'^{\perp} \rightarrow \mathbb{K}$  dado pela regra  $x \mapsto \langle x, w \rangle$ , temos  $\dim W^{\perp} = \dim (W'^{\perp} \cap (\mathbb{K}w)^{\perp}) \geq \dim W'^{\perp} - 1$  pelo Exercício 6.3. O resto segue de  $\dim W = \dim W' - 1$  por indução.

**6.6.**  $W \cap W^{\perp}$  é o núcleo da forma induzida em  $W$ .

**6.7.** Use  $W \subset W^{\perp\perp}$  e o Exercício 6.6.

**6.9.** Assumindo que  $\langle v, v \rangle = 0$  para todo  $v \in V$ , obtemos  $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = 0$  e, portanto,  $\operatorname{Re}\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  para todos  $v_1, v_2 \in V$ . Resta aplicar a última identidade a  $iv_1, v_2$ .

**6.10.** Usando os Exercícios 6.8 e 6.9, podemos encontrar um  $w \in W^{\perp}$  não-isotrópico e colocar  $W' := W + \mathbb{K}w$ .

**6.23.** Considere  $m = \dim(W \cap V^{\perp})$  e aplique o Exercício 6.4.

**6.24.** Decomponha  $V$  na soma ortogonal  $V = V_- \oplus V_+$  de subespaços de assinaturas  $(n_-, 0, 0)$  e  $(0, 0, n_+)$ . Se, digamos,  $\dim W > n_- \leq n_+$ , então  $W \cap V_+ \neq 0$ . Para construir um subespaço de dimensão  $\min(n_-, n_+)$  com a forma induzida nula, use os elementos isotrópicos mencionados no Exemplo 6.19.

**6.25.** Decomponha  $W$  na soma ortogonal  $W = W_- \oplus W_0 \oplus W_+$  de subespaços de assinaturas  $(m_-, 0, 0)$ ,  $(0, m_0, 0)$  e  $(0, 0, m_+)$ . Decompondo  $V = (W_- + W_+) \oplus (W_- + W_+)^{\perp}$ , note que  $m_- \leq n_-$ ,  $m_+ \leq n_+$  e  $W_0 \leq (W_- + W_+)^{\perp}$ , onde  $(W_- + W_+)^{\perp}$  tem assinatura  $(n_- - m_-, 0, n_+ - m_+)$ . Utilizando o Exercício 6.24, conclua que  $m_0 \leq n_- - m_-$  e  $m_0 \leq n_+ - m_+$ . Para  $m_-, m_0$  e  $m_+$  que satisfazem as desigualdades acima, construa um subespaço de assinatura  $(m_-, m_0, m_+)$ .