Curso de introdução à Teoria dos Jogos

1 Introdução

Jogos na forma normal
- Dilema do prisioneiro/Stag and Hare
—Estratégia dominada
—Equilíbrio de Nash puro
- Matching pennies
—Inexistência de equilíbrio puro
—Estratégia mista
- Loterias/cara ou coroa
—Retorno esperado
—Jogadas repetidas
— Existência de equilíbrio de Nash para jogos finitos

Jogos combinatórios
- Nim/Jogo da velha
— Árvores
— Indução reversa
— Estratégia vencedora
- Xadrez
— Valor de um jogo
— Indução matemática
— Teorema fundamental dos jogos
- Hex
— Impossibilidade de empate
— Existência de estratégia vencedora
— Argumento do roubo de estratégia
- Domineering
— Jogos combinatórios
— Classes de resultados
— Somas de jogos
- Hackenbush
— Álgebra dos jogos
— Valores de jogos

2 Dilema do Prisioneiro

Imagine a seguinte situação: você é um ladrão e, junto com um parceiro, tentou assaltar uma loja, mas vocês foram pegos dentro da loja, antes de pegarem qualquer mercadoria. Os policiais os interrogam em

salas separadas, para que não seja possível combinar uma história. Na sala, os policiais explicam que você já pode ser indiciado por invasão de propriedade, e pegaria três meses de prisão por isso, caso seu parceiro não te entregue; se você entregar seu parceiro e ele não te entregar, eles farão um acordo para que você seja liberado, mas seu parceiro ficará preso por um ano; se seu parceiro te entregar e você não o entregar, ele será liberado e você ficará na prisão por um ano; por fim, se ambos se entregarem, ambos são indiciados por tentativa de roubo, mas como ambos cooperaram, suas penas seriam reduzidas para oito meses.
O que você faria? Você entregaria seu parceiro? Por quê?
Essa situação pode ser facilmente colocado na forma matricial.

	Parceiro não te entrega	Parceiro te entrega
Você não entrega parceiro	3,3	12,0
Você entrega parceiro	0,12	8,8

Essa é a **forma normal** de um jogo. Nessa forma, qualquer jogo onde os jogadores tomam as decisões simultaneamente são facilmente visualizados. Mais adiante veremos que podemos representar até mesmo jogos onde os participantes tomam turnos, porém teremos perda de informações. Os números em cada célula representam o **retorno** de cada jogador, ou seja, quanto ele ganha (ou perde, no caso) se ocorrer essa situação. O primeiro número é o retorno do jogador I (você, ao lado), e o segundo do jogador II (seu parceiro, acima)
Se você pensou bem em como as opções te afetariam teria escolhido entregar seu parceiro, isso porque a estratégia de não é entregá-lo é uma **estratégia dominada**, ou seja, independentemente de como seu adversário jogar, você se sairá melhor usando outra estratégia (uma **estratégia dominante** sobre a primeira). Suponha que você saiba que seu parceiro não irá te entregar, então você se sairá melhor entregando-o, pois poderá sair imediatamente ao invés de passar três meses na prisão; da mesma forma, se você souber que seu parceiro vai te entregar, então também é melhor entregá-lo, pois você passará apenas oito meses na prisão, ao invés de doze. Portanto qualquer pessoa racional entregaria seu parceiro.
Mas porque esse jogo é famoso na Teoria de Jogos? Porque se ambos jogarem da melhor forma possível, terão um resultado pior do que se jogassem da pior maneira possível. Isso acontece porque os jogadores sempre tem um “incentivo” para entregar o parceiro, ou seja, a opção de os dois se entregarem é um **equilíbrio de Nash**.
Vamos chamar a estratégia “não entregar o parceiro” de A e “entregar o parceiro” de B, temos então as seguintes possibilidades de jogos: $(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)$. O primeiro termo é como o jogador I joga e o segundo como o jogador II joga. Para determinar se algum desses jogos é um Equilíbrio de Nash, temos de ver se algum dos jogadores tem algum “incentivo” para trocar de estratégia.
Comecemos com o jogo (B, A). Esse jogo corresponde à célula inferior esquerda. O jogador I está satisfeito com a sua estratégia, pois seu retorno teria sido pior com outra estratégia, porém o jogador II não, pois se tivesse escolhida a outra seu retorno seria melhor. Esse então não é um Equilíbrio de Nash, pois se jogássemos mais vezes, com certeza o jogador II mudaria de estratégia.
Agora o caso (A, A). Aqui nenhum dos dois jogadores estão satisfeitos, pois se soubessem que seu adversário jogaria assim, poderiam escolher a outra estratégia para ter um retorno melhor, ou seja, esse também não é um Equilíbrio de Nash.
Por fim, no caso (B, B) todos os jogadores ficam satisfeitos, pois se mudarem de estratégia seu retorno será pior, então continuássemos jogando este jogo, a tendência dos jogadores seria permanecer com a mesma estratégia.

2.1 Exemplos

Considere o jogo abaixo. Cada jogador tem três possibilidades de jogada, e os números nas células representam o retorno do jogador I, na lateral, e do jogador II, acima, nessa ordem.

	X	Y	Z
A	13,3	1,4	7,3
B	4,1	3,3	6,2
C	-1,9	2,8	8,-1

Tente determinar que estratégias são dominadas neste jogo antes de continuar.
Analisando as estratégias A, B e C do jogador I, vemos que nenhuma é dominante sobre as outras, mas rapidamente vemos que a estratégia Y é dominante sobre Z. E é isso? Acabamos?
Ainda não. O jogador I é muito esperto e percebe isso, ele sabe que II nunca escolherá a estratégia Z, porque sempre que ele pensar em escolher Z, poderá trocar por Y e ter um resultado melhor, independente da resposta de I. Então I simplesmente desconsidera a coluna da direita, ficando com o seguinte jogo:

	X	Y	[redacted]
A	13,3	1,4	
B	4,1	3,3	
C	-1,9	2,8	

Nesse novo jogo, equivalente ao primeiro, vemos que B é dominante sobre C, e aplicamos a mesma ideia, eliminando a última linha do jogo. No novo jogo Y é dominante sobre X, então eliminamos a primeira coluna e vemos que neste jogo B é dominante sobre A. Encontramos finalmente um jogo com a penas uma estratégia possível: (B, Y). Portanto se cada jogador jogar da melhor forma possível, sempre escolherão esta estratégia. Perceba também que este é o único equilíbrio de Nash do jogo, isso é só coincidência?
Imagine que não existe mais policiamento no mundo, então você poderia quebrar qualquer lei sem ser punido. Uma lei é um equilíbrio de Nash se todos preferirem seguir essa lei de qualquer modo. Imagine que temos um cruzamento onde dois carros chegam ao mesmo tempo. O jogador I tem o sinal verde e II o sinal vermelho, mas ambos podem escolher se atravessam o sinal (I o sinal verde e II o sinal vermelho) ou se param para o outro jogador. Se ambos avançarem os carros colidirão, o que causará prejuízo para ambos, se ambos pararem eles perdem um pouco de tempo até se decidirem quem passa primeiro, mas se apenas um avança enquanto o outro para, então quem avançou chega rápido em seu destino e o outro não tem nenhum prejuízo. Vamos representar da seguinte forma:

	Avança	Para
Avança	-5,-5	1,0
Para	0,1	-1,-1

É fácil ver que não existem estratégias dominantes neste jogo, mas e equilíbrios de Nash? As estratégias (Avança, Para) e (Para, Avança) são equilíbrios, portanto a lei que determina que quem tem o sinal verde deve passar é um equilíbrio de Nash, pois nenhum dos jogadores pode melhorar sua própria situação individualmente.

3 Matching Pennies

Neste jogo, cada jogador tem uma moeda em sua mão e deve escolher se joga cara ou coroa, mostrando a face escolhida da moeda ao mesmo tempo que seu adversário. O jogador I ganha se ambos mostrarem a mesma face (ambos escolherem cara, ou ambos escolherem coroa), e nesse caso o jogador II deve pagar $R\$1,00$ a ele, caso contrário, I paga a II. É muito simples colocar este jogo na forma normal.

	Cara	Coroa
Cara	1,-1	-1,1
Coroa	-1,1	1,-1

Analise o jogo e determine todas as estratégias dominadas e equilíbrios de Nash. É fácil ver que não existem estratégias dominadas nem equilíbrios de Nash para este jogo. Mas então qual o interesse em estudar esse jogo?
Vamos deixar as coisas mais interessantes. Suponha que o seu adversário tenha o poder de ler mentes, e você deve jogar contra ele? Como você jogaria?
É claro que qualquer estratégia que você escolha será derrotada, pois seu adversário sabe exatamente o que você irá escolher, a solução portanto é não escolher a estratégia. E se antes de cada rodada você jogar a moeda no ar e tampá-la quando cair, e mostrar seja lá qual face caiu? Note que desta forma seu adversário não saberá sua jogada de antemão, e terá que escolher alguma face aleatoriamente, ou seja, ele perdeu completamente sua vantagem.
Isso nos leva a definir **estratégia pura** e **estratégia mista**. Uma estratégia pura neste caso é simplesmente determinar uma das duas jogadas, como no caso em que vimos no Dilema do Prisioneiro, enquanto um estratégia mista é definir uma probabilidade de se jogar uma ou outra estratégia. No caso descrito acima, definimos que a probabilidade de se jogar cara é de 50%, assim como de jogar coroa, porém uma outra estratégia mista possível seria jogar um dado e jogar coroa somente se sair o número 1, e jogar coroa caso contrário, neste caso teríamos $\frac{1}{6}$ de jogar cara e $\frac{5}{6}$ de jogar coroa.
Já vimos que não existe um equilíbrio de Nash neste jogo, porém na realidade o que não existe é um **equilíbrio de Nash puro**, porém existe um **equilíbrio de Nash misto**, ou seja, estratégias mistas (não puras) em que nenhum dos jogadores pode melhorar seu retorno se seu adversário jogar desta maneira. Perceba que podemos ver uma estratégia pura como uma estratégia mista em que a probabilidade de se jogar uma jogada específica é 100%
Para entender melhor esses equilíbrios vamos ver como podemos calcular o retorno de uma estratégia que utiliza probabilidades.

4 Dados

Proponho o seguinte jogo: eu jogo um dado 10 vezes, cada vez que cair um número par você me paga R$1,00 e cada vez que cair um número ímpar eu te pago R$1,00. Você quer jogar este jogo? Por quê?

Deixemos as coisas mais interessantes. Novamente rolarei o dado 10 vezes, mas desta vez se cair o número 3, você me paga R$5,00, se cair qualquer outro número eu te pago R$1,00. Agora o jogo te interessa? Por quê?
Ou então jogo o dado 10 vezes e cada vez que sair 1 ou 2 eu te pago R$10,00 e você me paga R$3,00 se cair qualquer outro número. Quer jogar?
Se você quis jogar apenas o último jogo percebeu que nele há uma vantagem, mas como você determinou isso?
O primeiro é o mais simples, se metade das vezes eu ganho R$1,00 e metade eu perco R$1,00, então o esperado é que eu termine sem lucro nenhum (e também sem prejuízo), mas como podemos "matematizar" isso?
Suponha que vamos jogar o dado x vezes, então em $\frac{x}{2}$ vezes você ganha R$1,00, mas do mesmo modo em $\frac{x}{2}$ vezes você perde R$1,00, então lucro seria de $(1 \cdot \frac{x}{2}) - (1 \cdot \frac{x}{2}) = 0$, como esperávamos.
No segundo jogo você ganha R$1,00 em $\frac{5x}{6}$ vezes, mas perde R$5,00 em $\frac{x}{6}$, ou seja, o **retorno esperado** seria de $\frac{5x}{6} - (5 \cdot \frac{x}{6}) = 0$.
Agora qual seria seu retorno esperado para o terceiro jogo?
Perceba que o x pode ser qualquer número, inclusive 1, neste caso podemos determinar se o jogo é favorável ou não. No *Matching Pennies* da seção anterior, propusemos duas estratégias mistas. Como podemos usar a ideia de retorno esperado para determinar se uma estratégia mista é um equilíbrio?
No jogo em questão, uma estratégia mista para o jogador I é simplesmente escolher uma probabilidade $p \in [0, 1]$ de modo que a probabilidade de I jogar Cara é p e de jogar Coroa é $1 - p$. O jogador II também escolhe uma probabilidade $q \in [0, 1]$ análoga. Vamos calcular o retorno esperado para cada jogador.
Suponha novamente que vamos jogar x vezes. Em $p \cdot x$ vezes I joga Cara, mas dentre essas vezes II joga Cara q vezes, portanto o esperado é que o resultado seja (Cara,Cara) $q \cdot (p \cdot x)$ vezes. Dessa maneira encontramos todos os resultados esperados.

Jogador I	Jogador I	Quantas vezes sai o resultado
Cara	Cara	$p \cdot q \cdot x$
Cara	Coroa	$p \cdot (1 - q) \cdot x$
Coroa	Cara	$(1 - p) \cdot q \cdot x$
Coroa	Coroa	$(1 - p) \cdot (1 - q) \cdot x$

Com isso podemos calcular o retorno esperado para o jogador I de uma rodada:

$$(p \cdot q) + ((1-p) \cdot (1-q)) - (p \cdot (1-q)) - ((1-p) \cdot q) = p \cdot (q - 1 + q) + (1-p) \cdot (1 - q - q) = p(2q-1) + (1-p)(1-2q)$$

De maneira análoga deduzimos o retorno esperado de II:

$$(q \cdot (1-p)) + ((1-q) \cdot p) - (p \cdot q) - ((1-q) \cdot (1-p) = q(1-2p) + (1-q)(2p-1)$$

Para o jogador I, se $2q - 1 > 1 - 2q$, ou seja, $q > \frac{1}{2}$, então ele maximiza seu retorno colocando $p = 1$, mas se $1 - 2q > 2q - 1$, ou seja, $q < \frac{1}{2}$, então I maximiza seu retorno colocando $p = 0$. O mesmo vale para II, se $2p - 1 > 1 - 2p$, ou seja, $p > \frac{1}{2}$, é vantajoso colocar $q = 0$, se $p < \frac{1}{2}$, então colocamos $q = 1$. Note que se $q = \frac{1}{2}$, não importa o que fizermos com p, o retorno esperado será 0 (substitua na fórmula e confira), analogamente se $p = \frac{1}{2}$, para qualquer q teremos o retorno esperado de 0. Portanto $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$ é um equilíbrio de Nash.
Página 105 - Paradoxo de São Petersburgo
Refaça o raciocínio para o seguinte jogo e compare o resultado do equilíbrio de Nash com estratégias mistas e com estratégias puras:

	X	Y
A	2,1	0,0
B	0,0	1,2

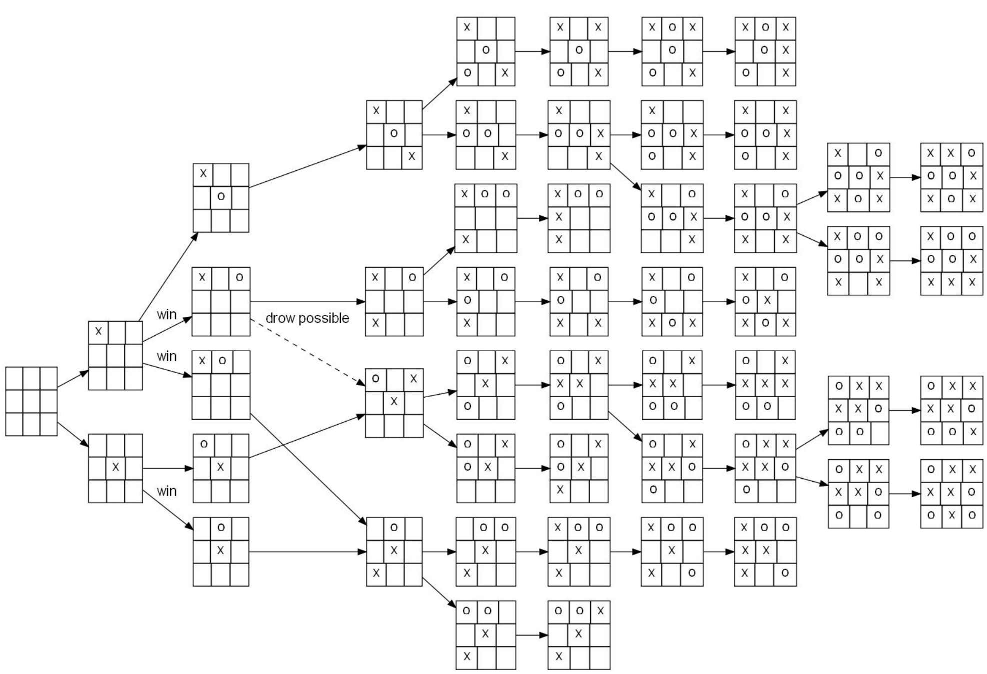
A demonstração de que todo jogo admite um equilíbrio de Nash não é tão complexa, mas é bastante abstrata, utilizando conceitos como espaços topológicos compactos, ponto de acumulação e espaço produto.

5 Jogo da Velha

A partir desta seção lidaremos com outro tipo de jogos: os jogos combinatórios. Uma definição mais abrangente define que estes são jogos sequenciais (cada jogador faz sua jogada em seu turno), de informação perfeita (não existe acaso e todo jogador tem todas as informações do jogo) e o jogo deve eventualmente acabar. Alguns exemplos de jogos combinatórios são:

- Jogo da Velha
- Xadrez
- Pontinhos (Dots and Boxes)

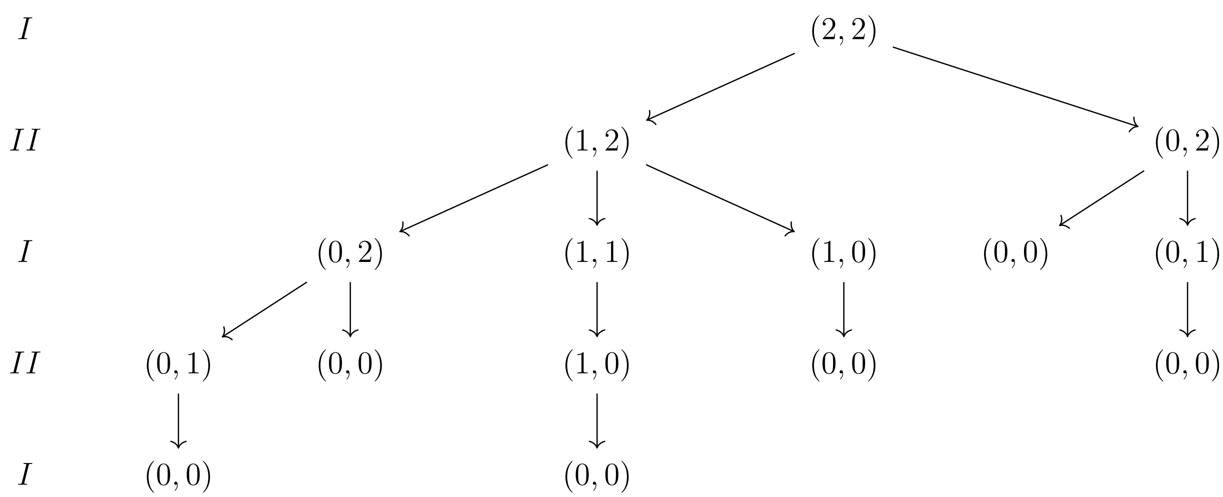
Alguns exemplos de jogos que não são combinatórios: Par ou Ímpar (ou qualquer jogo da seção anterior), porque os jogadores não tem turnos, mas jogam ao mesmo tempo; Truco, já que os jogadores não tem acesso às cartas dos demais jogadores, além do sorteio das cartas ser aleatório. A princípio o xadrez não satisfaz a última exigência, uma vez que cada jogador pode apenas mover alguma das peças (uma tore, por exemplo) para frente e para trás indefinidamente, mas pelas regras oficiais, se uma posição aparecer três vezes no tabuleiro o jogo acaba em empate.
Assim como os jogos na forma normal tem uma representação canônica na forma de matrizes, estes jogos também tem uma, porém na forma de **árvore**.



Cada bifurcação da árvore corresponde a uma posição possível do jogo, e os galhos dessa bifurcação são as posições que podem ser alcançadas a partir da posição original. A árvore começa no tabuleiro vazio, a posição inicial, e a cada nível vemos todas as possibilidades de jogada do jogador que move naquele turno. Veja como um jogo tão simples como este já tem uma árvore tão complexa, mas mesmo assim é uma representação bastante útil, como mostraremos.
Muitas pessoas sabem que existe uma maneira de jogar o jogo da velha que nos garante ao menos um empate, mas como encontramos essa estratégia?

6 Nim

Considere o jogo Nim com duas pilhas de duas pedras cada. Abaixo está a árvore de possibilidades desse jogo:



Como definimos uma estratégia para o jogador I neste jogo? Basta escolhermos um ramo da árvore para cada nó, ou seja, definimos uma jogada para cada posição possível. Uma estratégia possível é sempre escolher o ramo à esquerda da árvore acima, mas como determinamos se essa estratégia é boa? Note que este jogo não admite empate, então algum dos jogadores pode possuir uma **estratégia vencedora**, uma estratégia com a propriedade adicional de, independente da estratégia escolhida pelo adversário, sempre nos dará a vitória. De fato, mais adiante mostraremos que jogos combinatórios sempre admitem alguma estratégia vencedora.
Faremos o seguinte, para cada folha (últimos nós da árvore) anotaremos quem é o vencedor (se a folha $(0, 0$ aparecer no turno do jogador I, então o jogador II venceu e vice-versa). Agora prosseguiremos marcando os nós cujas bifurcações são todas folhas, se todas as folhas saindo deste nó são vitórias do adversário, marcaremos o nó como vitória do adversário, caso contrário marcaremos como vitória deste jogador. Fazemos o mesmo processo com o nós cujas bifurcações já tiverem sido todas marcadas até chegarmos na posição inicial, e então saberemos qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora. Este processo se chama **indução reversa**, abaixo completamos a árvore com i se I vence a posição e ii se II vence.

$$
\begin{tikzcd}
I & & & & (2,2)\,ii \arrow[dl] \arrow[drr] & & \\
II & & & (1,2)\,ii \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & (0,2)\,ii \arrow[dl] \arrow[d] \\
I & & (0,2)\,i \arrow[dl] \arrow[d] & (1,1)\,ii \arrow[d] & (1,0)\,i \arrow[d] & (0,0)\,ii & (0,1)\,i \arrow[d] \\
II & (0,1)\,ii \arrow[d] & (0,0)\,i & (1,0)\,ii \arrow[d] & (0,0)\,i & & (0,0)\,i \\
I & (0,0)\,ii & & (0,0)\,ii & & &
\end{tikzcd}
$$

Podemos usar esta mesma técnica para analisar o Jogo da Velha, adaptando a regra de preenchimento para considerar o caso de empate. Como faríamos isso? Faça a árvore do Jogo da Velha para algumas posições.

7 Xadrez

O jogo anterior é bastante simples, o que nos permite analisar toda a sua árvore de possibilidades e então descobrir se existe alguma estratégia vencedora, no caso do xadrez isso seria impossível, mas essas ferramentas ainda nos permite conseguir resultados.

Em primeiro lugar vamos definir o **valor de jogo**. Para as brancas, a vitórias das brancas ($\mathcal{B}$) é melhor do que o empate ($\mathcal{E}$) que é melhor do que uma vitória da pretas ($\mathcal{P}$), e o contrário vale para as pretas. Denotamos então $\mathcal{B} >_I \mathcal{E} >_I \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} >_{II} \mathcal{E} >_{II} \mathcal{B}$. Se existe um valor (por exemplo $\mathcal{E}$) tal que tanto o jogador I quanto o jogador II possuam uma estratégia que garante que o resultado será ao menos esse, então este é o valor do jogo.

Podemos inclusive imaginar que existam quantos finais possíveis $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$, desde que a relação $\mathcal{F}_1 >_I \mathcal{F}_2 >_I \cdots >_I \mathcal{F}_n$ e $\mathcal{F}_n >_{II} \mathcal{F}_{n-1} >_{II} \cdots >_{II} \mathcal{F}_1$ valha, estes são os jogo **estritamente competitivos**. Pense em como definir o valor de cada nó da árvore de possibilidades de um jogo com n finais possíveis.

Vamos mostrar que todo jogo tem um valor determinado, mas para isso precisamos do conceito de **indução matemática**.

Como podemos demonstrar que para todo número natural n vale a seguinte igualdade?

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n^2 + n}{2}$$

Podemos tentar manipular a igualdade até concluir o resultado, mas isso não funcionaria. Também não podemos provar individualmente para cada n, pois são infinitos, o que faremos é o seguinte: mostre que a igualdade é válida para algum n específico, como $n = 1$, depois suponha que a igualdade já foi estabelecida para todo n até um certo número k e tente mostrar se esse for o caso, então o resultado também é válido para $n = k + 1$.

Se fizermos isso, sabendo que vale para $n = 1$, provamos que vale para $n = 2$,e sabendo que vale para $n = 2$, mostramos que vale para $n = 3$, e para...

Esse é o princípio da indução matemática, em que se quisermos mostrar que algo é válido para todos os números naturais, basta mostrar que é válido para o primeiro caso e que qualquer outro caso é

consequência de valer para o caso anterior. Mas como isso nos ajuda?
Para qualquer jogo G, diremos que G tem **comprimento** k se o maior ramo da árvore de possibilidades de G tiver k níveis.

Teorema 7.1. *Se G é um jogo estritamente competitivo finito que admite apenas vitória ou derrota, então algum dos jogadores possui estratégia vencedora.*

Demonstração. Suponha que o jogo G tenha comprimento $n = 2$, ou seja, possui apenas a posição inicial e todas as bifurcações dela são folhas, então fazendo a indução inversa nesta árvore, é claro que algum dos jogadores tem estratégia vencedora.
Suponha que já tenhamos mostrado que para qualquer jogo de comprimento no máximo k algum dos jogadores tem estratégia vencedora e seja G um jogo de comprimento $n = k+1$. Note que cada posição do nível 2 é em si mesma um jogo de comprimento no máximo k, portanto algum dos jogadores tem estratégia vencedora. Marque qual jogador tem estratégia vencedora em cada um destes nós, então usando a regra da indução inversa, podemos determinar de quem é a vitória na posição inicial, ou seja, este jogador tem estratégia vencedora em G.
Pelo princípio de indução matemática, mostramos que o resultado vale para jogos de qualquer comprimento, ou seja, para qualquer jogo. □

Corolário 7.2. Seja G um jogo estritamente competitivo finito com finais possíveis $\mathcal{F}_1 >_I \mathcal{F}_2 >_I \cdots >_I \mathcal{F}_n$. Para qualquer subconjunto T de $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, ou o jogador I pode forçar um final em T ou o jogador II pode forçar um final que não esteja em$T$.

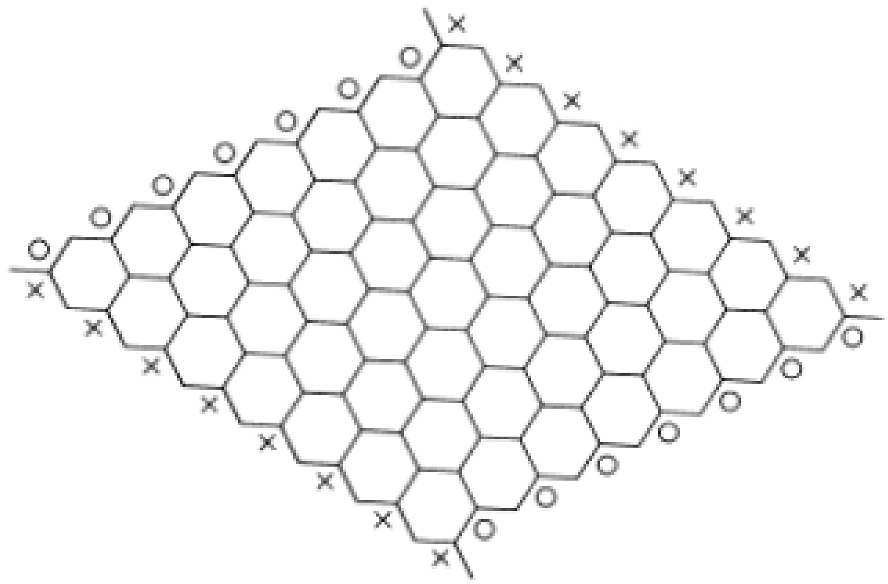
Demonstração. Seja G um jogo como no enunciado. Defina um novo jogo H modificando o critério de vitória G para I vence se o jogo acabar em um dos valores de T e II vence de o jogo acabar em um dos valores que não estão em T. Note que este novo jogo está nas condições enunciado anterior, portanto algum dos jogadores possui estratégia vencedora em H. Se I possuir estratégia vencedora, então pela definição do critério de vitória temos que o jogo G termina em um dos valores de T, e se II possuir estratégia vencedora, em algum dos valores que não estão em T. □

Corolário 7.3. Todo jogo finito estritamente competitivo tem um valor.

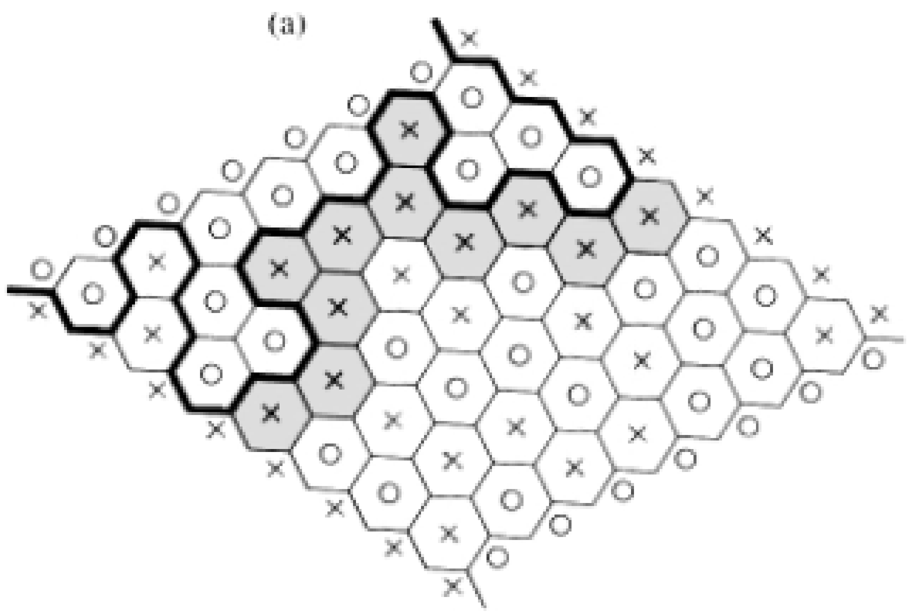
Demonstração. Sejam $\mathcal{F}_1 >_I \mathcal{F}_2 >_I \cdots >_I \mathcal{F}_n$ os valores finais possíveis do jogo G como no enunciado. Seja $A_k = \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ e $B_k = \{\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \ldots, \mathcal{F}_{n-k}\}$ para cada $k \leq n$. Note que o jogador I pode garantir um valor em A_n (pois contém todos os finais possíveis), mas não em um conjunto menor do que A_1, pois contém apenas uma possibilidade, então seja A_m o menor conjunto em que I pode garantir um final com valor em T_m e $1 \leq m \leq n$. Assim, I não pode forçar um final em T_{m-1}, então pelo teorema anterior II pode forçar um final que esteja em B_m, ou seja, tanto I quanto II podem forçar o final $\mathcal{F}_m$, portanto $\mathcal{F}_m$ é o valor do jogo. □

8 Hex

Nim é um jogo muito simples, em que é imediato que não existe empate, mas nem sempre é assim. No jogo Hex não é tão claro se é possível a partida terminar empatada, mas podemos provar que este é o caso (na verdade vamos provar algo um pouco mais forte). Pela seção anterior já sabemos que este jogo tem algum valor definido, se provarmos que o jogo não admite empate saberemos que algum dos jogadores tem estratégia vencedora, mas podemos determinar quem tem estratégia vencedora? É o que responderemos nesta seção.
Vamos mostrar que independente de como preenchermos o tabuleiro de Hex com o's e x's, ou o caminho dos círculos ligará os dois lados do jogador I ou os x's ligarão os lados do jogador II. Primeiro marque os lados do jogador I com o e do jogador II com x e colocamos começos de caminhos em cada ponta do tabuleiro, como na imagem.

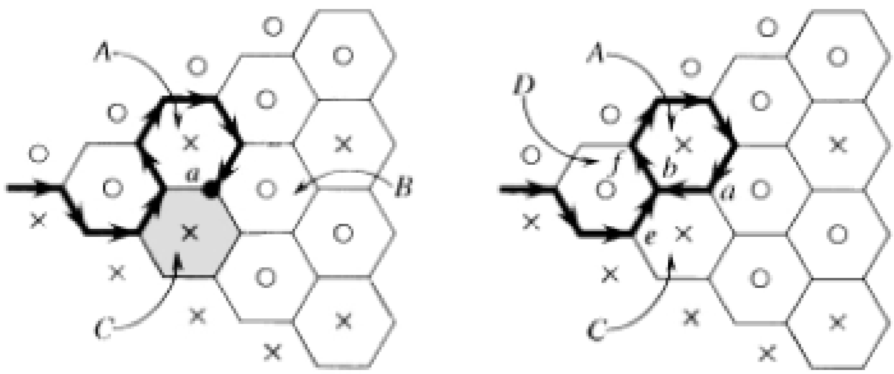


Vamos traçar um caminho da seguinte forma: comece em uma das extremidades desenhadas e, em cada vértice, escolha a aresta que tenha uma região com x de um lado e uma região com o de outro. Como no exemplo abaixo:



Temos dois fatos para mostrar, primeiro que esse caminho nunca voltará para um lugar onde já esteve e segundo que ele nunca termina dentro do tabuleiro. Se provarmos isso saberemos que qualquer desses caminho liga duas extremidades distintas.
Para o primeiro fato, suponha que tenhamos desenhado uma aresta do caminho, se estamos dentro do tabuleiro então existe uma casa a frente do caminho, adjacente às duas casas que possuem essa aresta, uma delas é um x e outra é um o, portanto independentemente da casa à frente, teremos para onde prosseguir (figura à esquerda abaixo deixa claro o argumento).
Para o segundo fato, suponha que um caminho voltou para um lugar onde já tenha passado antes, neste caso todas as três linhas saindo do vértice onde isso acontece fazem parte do caminho (como na imagem da direita, abaixo), podemos analisar o que acontece em cada caso dependendo de como as três casas

que dividem este vértice tiverem sido preenchidas e ver que isso seria impossível.



Mas então qualquer caminho liga duas extremidades, e consequentemente dois lados opostos do tabuleiro, e como sempre há pedras dos dois jogadores ao lado do caminho, temos que algum dos jogadores ganhou a partida.
Na verdade, como mencionamos, provamos algo um pouco mais forte do que Hex não admitir empate, provamos que isso nunca acontece independente de quantos x's e o's estiverem no tabuleiro.
Até agora descobrimos que algum dos jogadores tem estratégia vencedora, mas fazer a árvore de possibilidades deste jogo é impraticável, então como podemos descobrir qual deles tem a estratégia vencedora? Por sorte existe o argumento do **roubo de estratégia**. Note que em qualquer posição, as jogadas possíveis do jogador I e do jogador II são exatamente as mesmas, isso é o que chamamos de **jogo imparcial**, e para vários deles podemos usar o argumento a seguir para mostrar que o jogador I tem estratégia vencedora.
Suponha que o jogador II tenha uma estratégia vencedora, o jogador I irá usá-la contra o jogador II. Na primeira rodada I joga qualquer coisa, e II responderá com a estratégia vencedora. Mas e se desconsiderarmos nossa primeira jogada e usarmos a estratégia de II como se ele tivesse feito o primeiro movimento? Como estamos usando a estratégia vencedora nós teríamos que vencer, a não ser que em algum momento nossa estratégia nos diga para escolher justamente a casa que escolhemos na primeira jogada. Mas neste caso, como ela já foi jogada, escolhemos qualquer outra casa.
Portanto mesmo que essa demonstração não nos permita descobrir qual é a estratégia vencedora, sabemos que ela existe e que quem a possui é o jogador I.

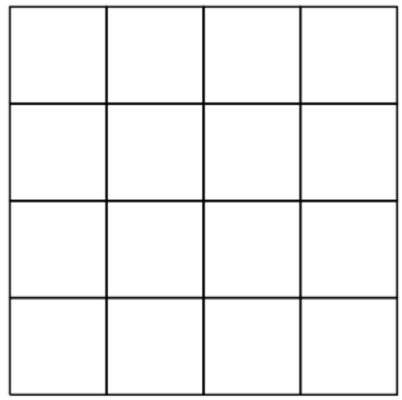
9 Dominando (Domineering)

Dominando, assim como Nim, são jogos combinatórios que possuem uma teoria já bastante desenvolvida, eles se caracterizam pelas seguintes propriedades:

- Dois jogadores tomam seus turnos alternadamente.
- Os jogadores tem informação perfeita e não há acaso.
- O jogo deve necessariamente terminar.
- Não existem empates, o vencedor é o último a mover.

Comentar mais alguma coisa?

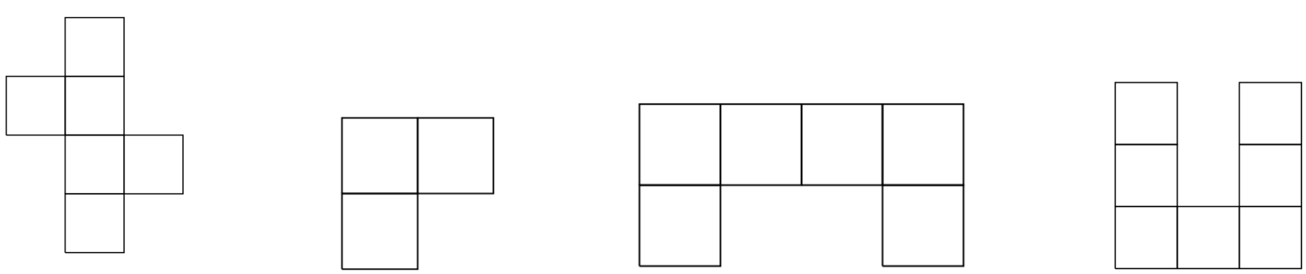
Considere o jogo abaixo:



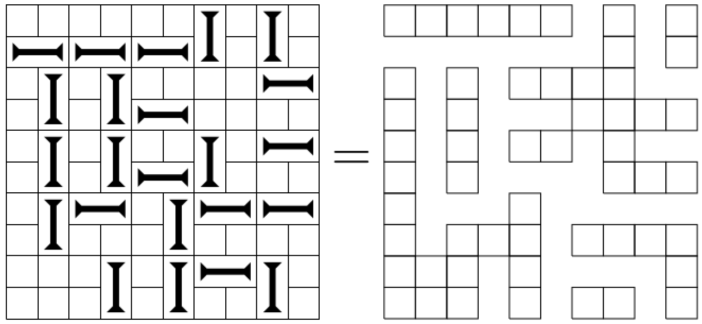
Já sabemos que algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, I pode forçar uma vitória jogando primeiro ou II pode forçar uma vitória jogando segundo, mas vamos analisar melhor, ms e se pensarmos que o jogo em questão é somente uma posição intermediária de um jogo maior? Neste caso não necessariamente é a vez do jogador I. Temos então quatro possibilidades (porque não colocamos outras?):

1. I e II tem estratégia vencedora jogando primeiro.
2. I e II tem estratégia vencedora jogando segundo.
3. I tem estratégia vencedora jogando primeiro ou segundo.
4. II tem estratégia vencedora jogando primeiro e segundo.

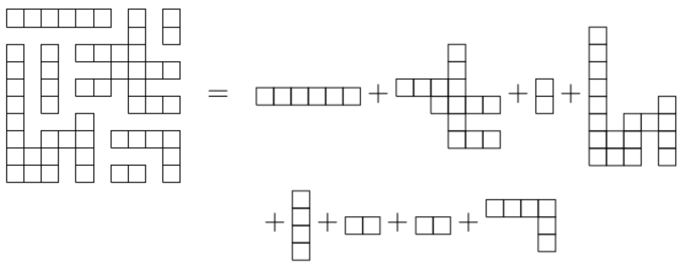
Vamos definir as **classes de resultados** da seguinte maneira: se o jogo estiver no primeiro caso, o jogo é de classe $\mathcal{P}$ (**P**rimeiro a jogar vence); se estiver no segundo, de classe $\mathcal{S}$ (**S**egundo a jogar vence); se estiver no terceiro de classe $\mathcal{I}$ (jogador I vence de qualquer forma); e se estiver no quarto caso, de classe $\mathcal{II}$ (jogador II vence de qualquer forma). Dizemos que um jogo nestas classes são uma posição-$\mathcal{P}$, posição-$\mathcal{S}$, posição-$\mathcal{I}$ e posição-$\mathcal{II}$, respectivamente.
Para o jogo acima podemos argumentar que ele é uma posição-$\mathcal{P}$ ou uma posição-$\mathcal{S}$. Por quê? Determine a que classe de resultado dos jogos abaixo pertencem:



Nesse tipo de jogos não é incomum encontrarmos posições que podem ser decompostas e várias partes independentes. Esse tipo de caso nos justifica a definir a **soma de jogos**, e nela serão úteis os conceitos anteriores.
No exemplo abaixo de uma posição intermediária de uma partida, a posição pode ser decomposta em várias posições distintas. Mas como podemos tirar proveito disso?



Definimos então que a soma de duas posições é a posição obtida colocando cada uma das posições lado a lado, em seu turno, cada jogador faz um movimento em uma das posições sendo somadas e o último a mover vence. Portanto;



Determine qual a classe de resultados de todas as somas de suas posições possíveis do exercício anterior. Podemos generalizar esses resultados para posições arbitrárias?
É natural pensar que se uma posição é vantajosa para o jogador I (for uma posição-$\mathcal{I}$) então ela deve receber um valor positivo e se for vantajosa para o jogador II (uma posição$\mathcal{II}$) receber um valor negativo. Mas e as outras posições? Note que a posição-$\mathcal{S}$ do exercício não altera a classe de resultado quando somada a qualquer das outras, o que nos indica que uma posição-$\mathcal{S}$ deve receber valor 0. De fato vamos mostrar que isso faz sentido, mas as posições-$\mathcal{P}$ são mais complexas.

10 Hackenbush

Nesta seção estudaremos a álgebra dos jogos. Primeiro é necessário definir precisamente o que são jogos e como fazer operações com eles matematicamente. Todas as definições devem refletir os fatos que consideramos naturais em jogos e ao mesmo tempo permitir ???

Definição 10.1. 1. Um jogo G é um conjunto $\{\mathcal{G}_I \,|\, \mathcal{G}_{II}\}$, onde $\mathcal{G}_I$ e $\mathcal{G}_{II}$ são posições.

2. $G + H = \{\mathcal{G}_I + H, G + \mathcal{H}_I \,|\, \mathcal{G}_{II} + H, G + \mathcal{H}_{II}\}$.

3. $-G = \{-\mathcal{G}_{II} \,|\, -\mathcal{G}_I\}$.

4. $G = H$ se para todo jogo X, $G + X$ e $H + X$ pertencem à mesma classe de resultado.

5. $G \geq H$ se para todo jogo em que I vence em $G + X$, I vence em $H + X$.

Essas definições podem não fazer muito sentido agora, mas vamos explicar e exemplificar melhor.
O que queremos na primeira definição é usar a árvore do jogo para definir o jogo, ou seja, um jogo é o conjunto contendo, do lado esquerdo, todas as possibilidades de jogadas do jogador I e, do lado direito, todas as possibilidades de jogada do jogador II. Por exemplo: