Formas Hermitianas e Espaço Projetivo

Hugo Cattarucci Botós

16 de julho de 2019

Sumário

Capítulo 1

Formas Hermitianas

Nosso objetivo nesse capítulo é falar um pouco sobre formas Hermitianas. Essencialmente, as usaremos para cozinhar métricas Riemannianas e coisas do tipo em regiões do espaço projetivo. Essa abordagem possui dois aspectos interessantes. O primeiro é que a descrição dos objetos geométricos em questão terá sabor algébrico e o segundo é que praticamente não usaremos coordenadas. Entre os espaços que veremos a frente se encontra o espaço hiperbólico real, o espaço hiperbólico complexo e o projetivo com a métrica de Fubini-Study.

No que segue, o corpo em questão será sempre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Além disso, estabeleceremos que o conjugado de um número $x \in \mathbb{R}$ é ele mesmo.

Definição 1.1 *Considere o espaço $\mathbb{K}$-linear V munido de uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ satisfazendo*

1. *para cada $u \in V$ a aplicação $\langle \cdot, u \rangle$ é linear;*
2. *$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todo $u, v \in V$.*

Dizemos que essa função $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma hermitiana em V.

Repare que no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o segundo item nos diz que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é simétrica, isto é,

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

para todo $u, v \in V$.

Exemplo 1.2 *O produto interno $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ é forma hermitiana em $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 1.3 *A função área*

$$\langle x, y \rangle = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{R}^2$ não é forma hermitiana, pois $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ não vale para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

De fato, tomando $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$, obtêm-se $\langle x, y \rangle = 1$ e $\langle y, x \rangle = -1$.

Repare que para uma forma hermitiana qualquer $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sempre vale

$$\langle u,u\rangle = \overline{\langle u,u\rangle}$$

e daí segue que $\langle u,u\rangle$ é sempre um número real.

Da definição de forma hermitiana concluí-se que

$$\langle u,\lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v,u\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle u,v\rangle} = \overline{\lambda}\langle u,v\rangle$$

e

$$\langle u,v_1+v_2\rangle = \overline{\langle v_1+v_2,u\rangle} = \overline{\langle v_1,u\rangle} + \overline{\langle v_2,u\rangle} = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle,$$

ou seja, $\langle u,\cdot\rangle$ é funcional anti-linear[1].

Observação 1.4 *Explicitemos uma forma hermitiana genérica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em coordenadas. Se V tem uma base $b_1,\ldots,b_n$, então, escrevendo $g_{ij} = \langle b_i,b_j\rangle$, obtêm-se a identidade*

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i,j} g_{ij}x_i\overline{y_j},$$

onde $x = \sum_i x_ib_i$ e $y = \sum_j y_jb_j$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \left\langle \sum_i x_ib_i, \sum_j y_jb_j \right\rangle \\ &= \sum_i\sum_j x_i\overline{y_j}\langle b_i,b_j\rangle = \sum_{i,j} g_{ij}x_i\overline{y_j}.\end{aligned}$$

Definição 1.5 *Dizemos que $u,v\in V$ são ortogonais ou perpendiculares se $\langle u,v\rangle = 0$. De forma mais geral, pode-se dizer que um vetor u é perpendicular ao subespaço linear $W\subset V$ se for perpendicular a cada elemento de W. Se $W\subset V$ é subespaço linear, então o ortogonal de W é o espaço*

$$W^\perp = \{u\in V : \langle u,v\rangle = 0 \text{ para todo } v\in W\}$$

formado pelos vetores perpendiculares a W. O conjunto $W^\perp$ é claramente subespaço linear de V.

Definição 1.6 *Se o único vetor perpendicular a todos os vetores é o vetor 0, então dizemos que a forma é não-degenerada e se $\langle u,u\rangle > 0$ para todo $u\neq 0$, então dizemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é forma positiva definida ou produto interno. Se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é produto interno, então definimos a norma de u como sendo o número real não negativo $|u| = \langle u,u\rangle^{1/2}$. Verificaremos mais tarde que $|\cdot|$ é de fato uma norma.*

Repare que se $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é produto interno, então é também não degenerada, porque o único vetor perpendicular a si mesmo é o vetor nulo.

[1] Uma função $f : V\to\mathbb{K}$ é funcional anti-linear se $f(v_1+\lambda v_2) = f(v_1)+\overline{\lambda}f(v_2)$.

Definição 1.7 *Dizemos que o subespaço W é não degenerado se a restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W \times W}$ é não degenerada.*

Observação 1.8 *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno em V, então todo subespaço W é espaço com produto interno com a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzida. Em particular, todo subespaço é não degenerado.*

Exemplo 1.9 *A forma hermitiana $\langle z, w \rangle = z\overline{w}$ em $\mathbb{C}$ é um produto interno e portanto é não degenerada. A forma $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ em $\mathbb{R}^3$ é não degenerada mas não é produto interno. A forma hermitiana $\langle x, y \rangle = x_1 y_1$ em $\mathbb{R}^2$ é degenerada.*

Exemplo 1.10 *No caso em que temos a forma hermitiana não degenerada $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ em $\mathbb{R}^3$, existem subespaços degenerados com respeito a essa forma. Por exemplo, se $W = [(0, 1, 1)]$, então temos que a forma induzida em W é a função nula e, portanto, degenerada.*

Proposição 1.11 *Seja W subespaço de V. Temos que W é não degenerado se, e só se, $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.*

Demonstração: Provaremos tanto a ida quanto a volta usando a contra-positiva.

Se W é degenerado, então há $u \in W \setminus \{0\}$ perpendicular a W, ou seja, $u \in W \cap W^{\perp}$. Como $u \neq 0$ segue que $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$. Logo,

$$W \cap W^{\perp} = \{0\} \Rightarrow W \text{ é não degenerado.}$$

Por outro lado, se $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$, então existe $u \in W \setminus \{0\}$ perpendicular a W, ou seja, $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $v \in W$, implicando que W é degenerado. Logo,

$$W \cap W^{\perp} = \{0\} \Leftarrow W \text{ é não degenerado.}$$

∎

Corolário 1.12 *Uma forma é não degenerada se, e só se, $V^{\perp} = \{0\}$.*

Definição 1.13 *Uma família de vetores $b_1, \ldots, b_n$ é ortonormal se*

$$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad \textit{quando} \quad i \neq j$$

e

$$\langle b_i, b_i \rangle \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ao invés de escrever $\langle b_i, b_i \rangle \in \{-1, 1\}$ toda hora escreveremos $\langle b_i, b_i \rangle = \pm 1$.

Proposição 1.14 *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma hermitiana em V e seja W subespaço de V não degenerado. Vale a identidade $W \oplus W^{\perp} = V$.*

Demonstração: Considere uma base $b_1, \ldots, b_k$ de W e os funcionais

$$f_i(x) := \langle x, b_i \rangle.$$

Podemos definir a aplicação linear $f : V \to \mathbb{K}^k$ dada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$. Claramente $\ker f = W^\perp$.

Portanto, pelo teorema do núcleo e imagem,

$$\dim V - \dim W^\perp \leq k = \dim W,$$

ou seja,

$$\dim W + \dim W^\perp \geq \dim V.$$

Como W é não degenerado, concluímos que $W \cap W^\perp = \{0\}$ e daí segue a identidade $W \oplus W^\perp = V$. ∎

Proposição 1.15 *Suponha que V é não degenerado e $W \subset V$ é subespaço não degenerado. Então $W^\perp$ é não degenerado.*

Demonstração: Se $x \in W^\perp$ é perpendicular a todo vetor de $W^\perp$, então x é perpendicular a todo vetor de V porque, pela proposição 1.14, $V = W \oplus W^\perp$ e x é perpendicular a todo vetor de W. Logo, $x = 0$ porque V é não degenerado. ∎

Em particular, ainda assumindo as hipóteses da proposição anterior, como $W^{\perp\perp} \subset W$ e $W^\perp \oplus W^{\perp\perp} = V$, por causa da proposição 1.14, obtêm-se $W = W^{\perp\perp}$.

Proposição 1.16 *Se $V \neq \{0\}$ é não degenerado, então existe $u \in V$ não nulo tal que $\langle u, u \rangle = \pm 1$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que para todo u tenhamos $\langle u, u \rangle = 0$. Se $u \in V \setminus \{0\}$ e h é um vetor qualquer, então temos

$$\langle u + h, u + h \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, h \rangle + \langle h, u \rangle + \langle h, h \rangle,$$

de onde segue que $\langle u, h \rangle + \langle h, u \rangle = 0$ para todo $h \in V$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então temos $\langle u, h \rangle = 0$ de onde segue que $u \in V^\perp$, que é uma contradição.

Por outro lado, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então trocando h por ih temos $\langle u, h \rangle - \langle h, u \rangle = 0$ para todo $h \in V$. Assim, concluímos que $\langle u, h \rangle = 0$ para todo $h \in V$ de onde segue que $u \in V^\perp$, que é uma contradição.

Logo, sempre existe $u \in V$ tal que $\langle u, u \rangle \neq 0$. Definindo $u' = (|\langle u, u \rangle|)^{-1/2} u$ temos que $\langle u', u' \rangle = \pm 1$, finalizando a prova. ∎

Proposição 1.17 *Suponha que V é espaço não degenerado e suponha que $W \subset V$ é subespaço próprio não degenerado. Então existe $b \in W^\perp$ satisfazendo $\langle b, b \rangle = \pm 1$.*

Demonstração: Pela proposição 1.15 concluímos que $W^\perp$ é não degenerado. Como $V = W \oplus W^\perp$ e $W \neq V$, então $W^\perp \neq \{0\}$. Pela proposição 1.16 concluímos que existe $b \in W^\perp$ satisfazendo $\langle b, b\rangle = \pm 1$. ∎

Proposição 1.18 *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma hermitiana sobre o espaço V de dimensão n, então V admite uma base ortonormal.*

Demonstração: Suponha que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada. Existe pela proposição 1.16 um vetor b_1 tal que $\langle b_1, b_1\rangle = \pm 1$.

Se $\dim V = 1$, então o resultado está provado. Caso contrário, $W_1 = [b_1]$ é subespaço próprio de V e não degenerado. De fato, basta notar que $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$.

Como $W_1 = [b_1]$ é subespaço próprio e não degenerado, temos pela proposição 1.17 que existe b_2 perpendicular a W_1 e satisfazendo $\langle b_2, b_2\rangle = \pm 1$.

Se b_1, b_2 geram o espaço V, então finalizamos a prova, caso contrário, repetimos o processo com $W_2 = [b_1, b_2]$. Repare que W_2 é não degenerado, pois se $u \in W_2 \cap W_2^\perp$, então $u = u_1 b_1 + u_2 b_2$ e u é perpendicular a W. Como $\langle u, b_1\rangle = \langle b_1, b_1\rangle u_1 = 0$ e $\langle u, b_2\rangle = \langle b_2, b_2\rangle u_2 = 0$, concluímos que $u = 0$, já que $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$ e $\langle b_2, b_2\rangle \neq 0$.

Portanto, iterando o argumento acima conseguimos uma base ortonormal.

Agora tratemos o caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é degenerada.

Seja $W = V^\perp$ e Z um subespaço vetorial de V satisfazendo $V = W \oplus Z$. Considere a restrição da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ao subespaço Z. Essa forma hermitiana é não degenerada. De fato, se $u \in Z$ e $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in Z$, então $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ pois $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $v \in W$ e $V = W \oplus Z$. Daí segue que $u = 0$ porque temos $u \in Z \cap W = \{0\}$. Assim, Z é não degenerado e, consequentemente, admite base ortonormal pelo caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada. Juntando essa base de Z com uma base qualquer de W obtemos uma base ortonormal de V. ∎

Observação 1.19 *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é forma hermitiana em V, então podemos induzi-la no quociente $V/V^\perp$ pela fórmula $([u], [v]) = \langle u, v\rangle$ e essa será forma hermitiana. É fácil ver que a forma hermitiana $(\cdot, \cdot)$ é não degenerada. Em outras palavras, quocientamos por $V^\perp$ para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ deixar de ser degenerada.*

Definição 1.20 *Diremos que um vetor v é positivo se $\langle v, v\rangle > 0$, nulo ou isotrópico se $\langle v, v\rangle = 0$ e negativo se $\langle v, v\rangle < 0$.*

Observação 1.21 *A terminologia "isotrópico"vem da física. Em relatividade restrita se estuda $\mathbb{R}^{n+1}$ com a forma hermitiana $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_0 y_0$, onde $x = (x_0, \ldots, x_n)$ e $y = (y_0, \ldots, y_n)$. As coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ são tidas como coordenadas espaciais e a coordenada x_0 é o tempo. Dizemos que o vetor x é tipo espaço se $\langle x, x\rangle > 0$, tipo tempo se $\langle x, x\rangle < 0$ e isotrópico se $\langle x, x\rangle = 0$.*

Proposição 1.22 (Teorema da Inercia de Sylvester) *Para toda base ortonormal existe um número l_+ de vetores positivos e um número l_- de vetores negativos, e esses dois números não dependem da escolha de base ortonormal.*

Demonstração: Suponha que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é não degenerada.

Afirmação: Nenhuma base ortonormal pode conter vetor isotrópico. De fato, suponha que $b_1, \dots, b_n$ é uma base ortonormal e b_1 é isotrópico. Como b_1 é perpendicular aos demais vetores da base segue que b_1 é perpendicular a todo vetor de V, o que não pode ocorrer porque a forma é não degenerada.

Considere uma base ortonormal $b_1, \dots, b_n$, que existe pela proposição 1.18, e suponhamos que $b_1, \dots, b_k$ são os vetores positivos e os demais vetores $b_{k+1}, \dots, b_n$ são negativos.

Seja V_+ um subespaço de dimensão máxima satisfazendo $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $u \in V_+ \setminus \{0\}$ e seja V_- um subespaço de dimensão máxima tal que $\langle u, u \rangle < 0$ para todo $u \in V_- \setminus \{0\}$. Claramente

$$V_+ \cap V_- = \{0\}, \quad \dim V_+ \geq k \quad \text{e} \quad \dim V_- \geq n - k$$

por causa da nossa base escolhida, ou seja, $V = V_+ \oplus V_-$. Logo, $\dim V_+ = k$ e $\dim V_- = n-k$. Como os espaços V_- e V_+ independem da escolha de base, temos que para toda base ortonormal a quantidade de termos positivos é $\dim V_+$ e a quantidade de termos negativos é $\dim V_-$. Em outras palavras, $l_+ = \dim V_+$ e $l_- = \dim V_-$.

Agora tratemos o caso em que a forma é degenerada. Considere o quociente $V/V^\perp$ e a forma não degenerada $(\cdot, \cdot)$ em $V/V^\perp$ obtida de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $b_1, \dots, b_l, \dots, b_n$ é base ortonormal tal que os vetores isotrópicos são $b_1, \dots, b_l$, então temos que esses l vetores pertencem a $V^\perp$ e os vetores $[b_{l+1}], \dots, [b_n]$ formam um conjunto linearmente independente e ortonormal em $V/V^\perp$. Como todo vetor de V é combinação de $b_1, \dots, b_n$ e $[b_i] = 0$ para $i = 1, \dots, l$, concluímos que os vetores $[b_{l+1}], \dots, [b_n]$ geram $V/V^\perp$, ou seja, $\dim V/V^\perp = n - l$ e, portanto, $\dim V^\perp = l$.

Em outras palavras, $\dim V^\perp$ é a quantidade de vetores isotrópicos de uma base qualquer. Como para toda base ortonormal os vetores não isotrópicos fornecem uma base ortonormal para $V/V^\perp$ concluímos, pelo caso não degenerado, que a quantidade de vetores positivos e a quantidade de vetores negativos independem da escolha de base ortonormal. ∎

Definição 1.23 *Se $b_1, \dots, b_n$ é uma base ortonormal de V, então denotaremos por l_+, l_0 e l_- a quantidade de vetores positivos, isotrópicos e negativos dessa base, respectivamente. Como vimos esses números independem da escolha de base. Chamaremos a terna (l_+, l_0, l_-) de assinatura da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Muitas vezes, denotamos a assinatura usando os símbolos $+$, $-$ e 0. Por exemplo, se escrevermos que a assinatura é $+++$, então queremos dizer que $l_+ = 3$, $l_0 = 0$ e $l_- = 0$, se escrevermos $++-$, então queremos dizer que $l_+ = 2$, $l_0 = 0$ e $l_- = 1$, e se escrevermos $+0$, queremos dizer que $l_+ = 1$, $l_0 = 1$ e $l_- = 0$. A quantidade de $+$'s simboliza l_+, a quantidade de 0's simboliza l_0 e a quantidade de $-$'s simboliza l_-.

Uma base ortonormal $b_1, \ldots, b_n$ nos permite escrever $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} = \langle b_i, b_j \rangle x_i \overline{y_j},$$

onde $x = \sum_i x_i b_i$ e $y = \sum_j y_j b_j$. Como a base é ortonormal segue que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle b_i, b_i \rangle$ é sempre 1, 0 ou -1. Assim podemos escrever

$$\langle x, y \rangle = \sum_i c_i x_i \overline{y_i},$$

onde $c_i \in \{-1, 0, 1\}$. A quantidade de sinais positivos nessa representação é l_+ e a quantidade de sinais negativos é l_-.

Por exemplo, se temos a forma $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ em $\mathbb{R}^3$, então a sua assinatura é $++-$.

Considere a base $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, não necessariamente ortonormal, de V e defina $g_{ij}^B = \langle b_i, b_j \rangle$. A matriz de Gram da base B é a matriz $G^B = (g_{ij}^B)$.

Proposição 1.24 *Se B e C são bases de V, então* $\operatorname{sign} \det G^B = \operatorname{sign} \det G^C$.

Demonstração: Temos que $b_j = \sum_i A_{ij} c_i$ para alguma matriz invertível $A = (A_{ij})$. Assim temos $g_{a,b}^B = \sum_{i,j} A_{ia} g_{ij}^C \overline{A_{jb}}$, ou seja, $G^B = A^* G^C A$. Portanto, $\det(G^B) = |\det A|^2 \det(G^C)$, de onde segue o resultado. ∎

Proposição 1.25 *A matriz de Gram G^B tem determinante nulo para alguma base B se, e só se, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é forma hermitiana degenerada.*

Demonstração: Basta notar que a matriz de Gram de uma base ortonormal tem determinante nulo se, e só se, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é degenerada. Daí basta usar a proposição anterior juntamente com o fato de que todo espaço admite base ortonormal. ∎

Proposição 1.26 *Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é produto interno, então a matriz de Gram G^B tem determinante positivo para qualquer base B.*

Demonstração: Numa base ortonormal $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sempre temos $\langle b_i, b_i \rangle = 1$ e $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, ou seja,

$$\det G^B = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

∎

Proposição 1.27 (Critério de Sylvester) *Seja* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *uma forma hermitiana sobre* V *não degenerada e seja* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ *uma base tal que as submatrizes de Gram* $G_k^B := (g_{ij}^B)_{1 \leq i,j \leq k}$ *de tamanho* k *tenham determinante não nulo para* $k = 1, \dots, n$.

A quantidade de termos positivos e negativos na sequência

$$\det(G_1^B), \frac{\det(G_2^B)}{\det(G_1^B)}, \dots, \frac{\det(G_n^B)}{\det(G_{n-1}^B)}$$

são, respectivamente, l_+ *e* l_-.

Demonstração: A ideia da prova é construir uma base ortonormal $b_1', b_2', \dots, b_n'$ tal que

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \cdots + [b_k] = [b_1'] + [b_2'] + [b_3'] + \cdots + [b_k']$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Como $\det G_1^B \neq 0$ temos $\langle b_1, b_1 \rangle \neq 0$. Definindo $b_1' = (|\langle b_1, b_1 \rangle|)^{-1/2} b_1$ obtemos $\langle b_1', b_1' \rangle = \pm 1$. Trivialmente temos

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \cdots + [b_k] = [b_1'] + [b_2] + [b_3] + \cdots + [b_k]$$

para $k = 1, \dots, n$.

Os espaços $[b_1']$ e $[b_1] + [b_2]$ são não degenerados, pois $\det(G_1^B) \neq 0$ e $\det(G_2^B) \neq 0$. Pela proposição 1.17 existe um vetor $b_2' \in [b_1] + [b_2]$ ortogonal a b_1' e satisfazendo $\langle b_2', b_2' \rangle = \pm 1$. Desta forma b_1', b_2' é base de $[b_1] + [b_2]$ e, portanto,

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \cdots + [b_k] = [b_1'] + [b_2'] + [b_3] + \cdots + [b_k]$$

para $k = 1, \dots, n$.

Novamente usando a proposição 1.17 nos espaços $[b_1'] + [b_2'] \subsetneq [b_1] + [b_2] + [b_3]$ concluímos que existe b_3' satisfazendo $\langle b_3', b_3' \rangle = \pm 1$ e perpendicular a $[b_1'] + [b_2']$ tal que b_1', b_2', b_3' é base de $[b_1] + [b_2] + [b_3]$. Portanto,

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + [b_4] + \cdots + [b_k] = [b_1'] + [b_2'] + [b_3'] + [b_4] + \cdots + [b_k]$$

para $k = 1, \dots, n$.

Seguindo esse processo, obtemos a base ortonormal $B' = \{b_1', b_2', \dots, b_n'\}$ desejada. Como

$$[b_1] + [b_2] + [b_3] + \cdots + [b_k] = [b_1'] + [b_2'] + [b_3'] + \cdots + [b_k']$$

para todo k, concluímos que $\operatorname{sign}(\det(G_k^B)) = \operatorname{sign}(\det(G_k^{B'}))$. Assim a quantidade de fatores positivos e negativos da sequência

$$\det(G_1^B), \frac{\det(G_2^B)}{\det(G_1^B)}, \dots, \frac{\det(G_n^B)}{\det(G_{n-1}^B)}$$

coincide com a quantidade de fatores positivos e negativos da sequência

$$\det(G_1^{B'}), \frac{\det(G_2^{B'})}{\det(G_1^{B'})}, \dots, \frac{\det(G_n^{B'})}{\det(G_{n-1}^{B'})},$$

que é a sequência

$$\langle b_1, b_1\rangle, \langle b_2, b_2\rangle, \ldots, \langle b_n, b_n\rangle,$$

pois

$$G^{B'} = \begin{bmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle b_2, b_2\rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle b_n, b_n\rangle \end{bmatrix},$$

de onde segue o resultado. ∎

A seguir apresentamos uma bela prova da desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Proposição 1.28 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é produto interno, então*

$$|\langle a, b\rangle| \leq |a||b|$$

para todo $a, b \in V$.

Demonstração: Note que se a, b são linearmente dependentes, então a afirmação é trivialmente verdadeira. Suponha que a, b são linearmente independentes. Se $B = \{b_1, b_2\}$ é base ortonormal de $[a] + [b]$, então $\langle b_1, b_1\rangle = 1$ e $\langle b_2, b_2\rangle = 1$, ou seja, a assinatura de $[a] + [b]$ é $++$. Pela proposição 1.27 concluímos que

$$\langle a, a\rangle, \quad \det \begin{bmatrix} \langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle \end{bmatrix} / \langle a, a\rangle$$

são números positivos, ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} \langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle \end{bmatrix} > 0,$$

de onde segue o resultado. ∎

Uma norma no espaço $\mathbb{K}$-linear V é uma função $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $|\lambda x| = |\lambda||x|$ para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times V$;
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para todo $x, y \in V$;
3. $|x| > 0$ para todo $x \in V^\times$.

A desigualdade no segundo item se chama desigualdade triangular.

Se $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é produto interno, então a função $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ é uma norma. De fato, a primeira e a ultima propriedade são triviais e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leq |x|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

ou seja, obtemos a desigualdade triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Capítulo 2

Propriedades Básicas do Espaço Projetivo

2.1. Espaço Projetivo

Fixe um espaço $\mathbb{K}$-linear V de dimensão finita n. O espaço projetivo $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$ é o conjunto de todos os subespaços de V de dimensão 1. Se não houver ambiguidade, escreveremos $\mathbf{P}(V)$ no lugar de $\mathbf{P}_{\mathbb{K}}(V)$.

Repare que existe uma aplicação natural $\pi : V^{\times} \to \mathbf{P}(V)$ dada por $\pi(x) = [x]$. Podemos projetivizar também subconjuntos de $V^{\times}$: Se $W \subset V^{\times}$, então definimos $\mathbf{P}(W) := \pi(W)$.

Definição 2.1 *Considere o espaço $\mathbb{K}$-linear Y e a função $h : V^{\times} \to Y$. A função h é homogênea de grau $l \in \mathbb{R}$ se*

$$h(kx) = k^l h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^{\times} \times V^{\times}.$$

Repare que podemos definir função homogênea de grau 0 para funções de $V^{\times}$ em Y, onde Y é um conjunto arbitrário.

Definição 2.2 *Considere o conjunto Y e a função $h : V^{\times} \to Y$. A função h é homogênea de grau 0 (ou $\mathbb{K}^{\times}$-invariante) se*

$$h(kx) = h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^{\times} \times V^{\times}.$$

Se h é uma função homogênea de grau 0, então podemos definir a função $\tilde{h} : \mathbf{P}(V) \to Y$ a partir da fórmula $\tilde{h}(p) = h(x)$, onde x é um vetor não nulo qualquer de p. Não é difícil ver que a definição de $\tilde{h}(p)$ independe da escolha de x. Com efeito, se x e x' são vetores não nulos de p, então existe $k \neq 0$ satisfazendo $x' = kx$ e daí segue que

$$h(x') = h(kx) = h(x).$$

Denotaremos h e $\tilde{h}$ pela mesma letra.

Fica claro a partir dessa observação que uma função homogênea de grau 0 nada mais é que uma função do projetivo. Com isso em mente adotaremos o seguinte "slogan":

Funções homogêneas de grau 0 de $V^\times$ em Y = Funções de $\mathbf{P}(V)$ em Y.

Definição 2.3 *Um cone C em $V^\times$ é um subconjunto de $V^\times$ tal que $kx \in C$ para todo $x \in C$ e todo $k \in \mathbb{K}^\times$. Podemos definir o que é uma função homogênea de grau l em C analogamente ao que fizemos acima: Uma função $h : C \to Y$ é homogênea de grau l se*

$$h(kx) = k^l h(x) \quad \forall (k, x) \in \mathbb{K}^\times \times C.$$

Sempre que temos uma função $h : C \to Y$ homogênea de grau 0, podemos definir $h : \mathbf{P}(C) \to Y$ pela fórmula $h(p) = h(x)$, onde $x \in p$ é não nulo.

Além disso, se temos a função $h : C \to \mathbb{R}$ e se existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $h(kx) = |k|^l h(x)$ para todo $(k, x) \in \mathbb{K}^\times \times C$, ainda faz sentido escrever $h(p) > 0$, $h(p) = 0$ e $h(p) < 0$ para pontos $p \in \mathbf{P}(C)$. Dizemos que $h(p) > 0$ quando $h(x) > 0$ para todo $x \in p$ não nulo, $h(p) < 0$ quando $h(x) < 0$ para todo $x \in p$ não nulo e $h(p) = 0$ quando $h(x) = 0$ para todo $x \in p$ não nulo.

A aplicação $\pi : V^\times \to \mathbf{P}(V)$ nos fornece uma bijeção entre os cones de $V^\times$ e os subespaços de $\mathbf{P}(V)$. De fato, se C é um cone de $V^\times$, então $\mathbf{P}(C)$ é um subconjunto de $\mathbf{P}(V)$ e $\pi^{-1}(\mathbf{P}(C)) = C$. Por outro lado, se $S \subset \mathbf{P}(V)$, então $\pi^{-1}(S)$ é um cone e $\pi(\pi^{-1}(S)) = S$. Logo, a aplicação $C \mapsto \mathbf{P}(C)$ é uma bijeção entre cones de $V^\times$ e subconjuntos de $\mathbf{P}(V)$.

2.2. Topologia e Estrutura Suave

Proposição 2.4 *Existe uma norma em V e toda norma em V induz a mesma topologia.*

Demonstração: Considere uma base $b_1, \ldots, b_n$ em V e defina a norma

$$|x|_V = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$

onde $x = \sum_k x_k b_k$. Assim, V admite uma norma.

Se considerarmos o isomorfismo linear $\phi : \mathbb{K}^n \to V$ dado por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k,$$

então a aplicação $\phi : (\mathbb{K}^n, |\cdot|_{\mathbb{K}^n}) \to (V, |\cdot|_V)$ é isometria, onde sobre $\mathbb{K}^n$ se considera a norma usual

$$|(x_1, \ldots, x_n)|_{\mathbb{K}^n} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}.$$

Como a esfera em $\mathbb{K}^n$ é compacta, obtemos que a esfera $S = \{x \in V : |x|_V = 1\}$ é um conjunto compacto.

Considere outra norma $|\cdot|$ em V. Se $x = \sum_k x_k b_k$, então usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtêm-se

$$|x| \leq \sum_k |b_k||x_k| \leq \left(\sum_k |b_k|^2\right)^{1/2} |x|_V,$$

de onde segue que $|\cdot|$ é uma função contínua em $(V, |\cdot|_V)$.

Como $|\cdot|$ é contínua, S é compacto e $|x| \neq 0$ para todo $x \in S$, já que $0 \notin S$, existem $0 < c_1 < c_2$ tais que $c_1 \leq |x| \leq c_2$ para todo $x \in S$. Assim, dado que $x \neq 0$, sabemos que $x/|x|_V \in S$ e, portanto,

$$c_1 \leq \frac{|x|}{|x|_V} \leq c_2,$$

de onde segue que $c_1|x|_V \leq |x| \leq c_2|x|_V$ para todo $x \neq 0$. Como a desigualdade vale trivialmente para $x = 0$, concluímos que $|\cdot|_V$ e $|\cdot|$ induzem a mesma topologia. ∎

Portanto, V é naturalmente um espaço topológico e desta forma podemos induzir em $\mathbf{P}(V)$ a topologia quociente do mapa $\pi : V^\times \to \mathbf{P}(V)$, isto é, U é aberto em $\mathbf{P}(V)$ se, e só se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $V^\times$.

Proposição 2.5 *A aplicação $\pi : V^\times \to \boldsymbol{P}(V)$ é contínua e aberta.*

Demonstração: Que π é contínua é trivial por causa da definição da topologia de $\mathbf{P}(V)$. Considere um aberto U aberto em $V^\times$, o conjunto $\pi(U)$ é aberto em $\mathbf{P}(V)$ porque $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{\alpha \in \mathbb{K}^\times} \alpha U$ é aberto em $V^\times$ (basta notar que é união de abertos). ∎

Proposição 2.6 *Considere uma aplicação $f : \boldsymbol{P}(V) \to Z$, onde Z é um espaço topológico. Temos que f é contínua se, e só se, $f \circ \pi$ é contínua.*

Demonstração: Se f é contínua, então claramente $f \circ \pi$ é contínua. Agora mostremos a recíproca, ou seja, suponha que $f \circ \pi$ é contínua e mostremos que f é contínua. Considere um aberto W em Z. Como $\pi^{-1}(f^{-1}(W)) = (f \circ \pi)^{-1}(W)$ é aberto em $V^\times$, temos que $\pi(\pi^{-1}(f^{-1}(W))$ é aberto em $\mathbf{P}(V)$, pois a aplicação π é aberta. Como $\pi(\pi^{-1}(f^{-1}(W))) = f^{-1}(W)$, finalizamos a prova. ∎

Para toda função $f : U \to \mathbb{K}$ contínua, onde $U \subset \mathbf{P}(V)$ é aberto, existe uma função contínua $g = f \circ \pi$ em $\pi^{-1}(U)$ homogênea de grau 0. Por outro lado, se $g : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{K}$ é contínua e homogênea de grau 0, então podemos definir $f(p) := g(x)$, $x \in p - \{0\}$, e teremos $g = f \circ \pi$. Por argumento análogo ao feito na proposição anterior, fazendo uso de que π é aberta, concluímos que f é contínua. Logo, podemos fazer a seguinte identificação:

$$C(U) = \{f \in C(\pi^{-1}(U)) : f \text{ é homogêneo de grau } 0\}.$$

Proposição 2.7 *O espaço projetivo é compacto.*

Demonstração: Fixe uma base $b_1, \ldots, b_n$ e defina a norma

$$|x|_V = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$

onde $x = \sum_k x_k b_k$.

A esfera $S = \{x \in V : |x|_V = 1\}$ é compacta e a aplicação $\pi : S \to \mathbf{P}(V)$ é contínua e sobrejetora, ou seja, $\mathbf{P}(V)$ é imagem de um compacto por uma função contínua e, portanto, é compacto. ∎

Proposição 2.8 *O espaço projetivo é Hausdorff.*

Demonstração: Considere a norma $|\cdot|_V$ e a esfera S como na prova da proposição anterior. Considere dois pontos p_1 e p_2 distintos em $\mathbf{P}(V)$. Existem x_1 e x_2 em S tais que $p_i = [x_i]$. Como $p_i \cap S = \{kx_i : |k| = 1\}$, concluímos que $p_1 \cap S$ e $p_2 \cap S$ são compactos. Como $p_1 \neq p_2$, então temos que $p_1 \cap S$ e $p_2 \cap S$ são fechados disjuntos. Pelo lema de Urysohn existe $g : S \to [0,1]$ contínua tal que $g|_{p_1} = 0$ e $g|_{p_2} = 1$. A partir dessa função queremos definir uma função no projetivo, mas primeiro devemos fazer um argumento de média para deixá-la homogênea de grau 0.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então defina

$$h(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2},$$

e se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então defina

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}x)d\theta.$$

Em todo caso, h é contínua e $h(kx) = h(x)$ sempre que $|k| = 1$. Definindo $\widehat{h}(x) = h(x/|x|)$ obtemos uma função homogênea de grau 0 e contínua de $V^\times$ em $[0,1]$ tal que $\widehat{h}(x) = 0$ para todo $x \in p_1$ não nulo e $\widehat{h}(x) = 1$ para todo $x \in p_2$ não nulo. Defina para cada $p \in \mathbf{P}(V)$ a função $\tilde{h}(p) = \widehat{h}(x)$, onde $x \in p$ é não nulo. Sabemos que essa aplicação está bem definida e é contínua, por causa da proposição 2.6. Tomando as vizinhanças $U_1 = \{p \in \mathbf{P}(V) : \tilde{h}(p) < 1/2\}$ e $U_2 = \{p \in \mathbf{P}(V) : \tilde{h}(p) > 1/2\}$ de p_1 e p_2, respectivamente, obtêm-se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, que é o resultado desejado. ∎

Proposição 2.9 *O espaço projetivo tem base enumerável.*

Demonstração: Repare que V tem base enumerável porque é homeomorfo a $\mathbb{K}^n$. Existe então uma base $\mathcal{B}$ enumerável para $V^\times$. Defina $\tilde{\mathcal{B}}$ como sendo o conjunto dos abertos[1] $\pi(B)$ com $B \in \mathcal{B}$. Se U é aberto em $\mathbf{P}(V)$, então $V = \pi^{-1}(U)$ é aberto em $V^\times$. Temos que $V = \cup_i B_i$ para uma família $\{B_i\}$ de abertos de $\mathcal{B}$. Assim temos $U = \pi(V) = \cup_i \pi(B_i)$, finalizando a prova. ∎

Discutamos o projetivo como variedade suave.

Primeiramente, um espaço vetorial V de dimensão n é variedade em que as cartas são isomorfismos lineares de V em $\mathbb{K}^n$. De fato, basta notar que se $\phi_1 : V \to \mathbb{K}^n$ e $\phi_2 : V \to \mathbb{K}^n$ são isomorfismos lineares, então $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é isomorfismo linear, que é função suave.

[1] A aplicação π é aberta.

Assim, do ponto de vista de variedades suaves, um espaço vetorial n-dimensional V e $\mathbb{K}^n$ são iguais.

Considere o funcional linear não nulo $\xi : V \to \mathbb{K}$ e defina

$$U_\xi = \{p \in \mathbf{P}(V) : \xi(p) \neq 0\} \quad \text{e} \quad A_\xi = \{x \in V : \xi(x) = 1\}.$$

O conjunto A_ξ é subespaço afim de V.

Observação 2.10 *Um subconjunto S de V é um subespaço afim se existem $b \in S$ e um subespaço vetorial W de V tal que $S = b + W$, ou seja, se S é um subespaço vetorial transladado. No caso em que $S = A_\xi$, temos que b é um vetor qualquer satisfazendo $\xi(b) = 1$ e $W = \ker \xi$. Assim, $A_\xi = b + \ker \xi$.*

Um subespaço afim é sempre uma variedade com as cartas $T_b : S \to W$ dadas por $T_b(x) = x - b$, onde $b \in S$. Repare que as mudanças de cartas são $T_{b'} \circ T_b^{-1}(x) = x + (b - b')$, que são suave. Assim, do ponto de vista suave, A_ξ, $\ker \xi$ e $\mathbb{K}^{n-1}$ são a mesma variedade suave. Com isso em mente, podemos usar A_ξ para fazer as cartas do espaço projetivo.

A seguinte aplicação

$$\phi_\xi : U_\xi \to A_\xi,$$

dada por

$$\phi_\xi(p) = \frac{p}{\xi(p)},$$

é homeomorfismo cuja inversa é $\phi_\xi^{-1}(x) = [x]$. Se $\sigma : V \to \mathbb{K}$ é outro funcional linear não nulo, então podemos considerar o homeomorfismo

$$\phi_\sigma : U_\sigma \to A_\sigma$$

e assim temos

$$\phi_\xi \circ \phi_\sigma^{-1}(x) = \frac{x}{\xi(x)},$$

que é uma função suave. Assim, $\mathbf{P}(V)$ é variedade suave de dimensão $(n-1)\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ com as cartas ϕ_ξ, onde $\xi \in V^* \setminus \{0\}$.

Claramente $\mathbf{P}(V)$ é variedade complexa de dimensão complexa $n - 1$ quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou seja, $\mathbf{P}(V)$ tem dimensão $2(n-1)$ como variedade real.

Com a estrutura de variedade suave temos que a aplicação $\pi : V^\times \to \mathbf{P}(V)$ é suave, já que para toda carta ϕ_ξ temos $\phi_\xi \circ \pi(x) = \frac{x}{\xi(x)}$. Assim, se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função suave no aberto U de $\mathbf{P}(V)$, então $g = f \circ \pi$ é suave em $\pi^{-1}(U)$ e homogênea de grau 0. Por outro lado, se $U \subset \mathbf{P}(V)$ é aberto e $g : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ é uma função suave e homogênea de grau 0, então existe uma única função $f : U \to \mathbb{R}$ suave satisfazendo $g = f \circ \pi$. Para ver que tal f é suave, basta notar que na carta ϕ_ξ podemos escrever f como $f \circ \phi_\xi^{-1}(x) = f([x]) = g(x)$, que é suave, ou seja, f é suave em U. Desta forma, temos a seguinte identificação:

$$C^\infty(U) \cong \{f \in C^\infty(\pi^{-1}(U)) : f \text{ é homogênea de grau } 0\}.$$

No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pode-se considerar o resultado análogo para funções holomorfas.

2.3. Projetivo em Coordenadas

Na seção anterior explicamos como se define a estrutra suave em $\mathbf{P}(V)$. Faremos a seguir uma breve discussão sobre o caso em que V tem uma base pré-fixada.

Tome uma base $b_1, \ldots, b_n$ de V. Se $x = \sum_i x_i b_i$ é um vetor não nulo de V, então denotaremos $[x]$ por $[x_1, \ldots, x_n]$. Desta forma,

$$\mathbf{P}(V) = \{[x_1, \ldots, x_n] : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}.$$

Como vimos, funcionais não nulos de V nos dão cartas de $\mathbf{P}(V)$. Considere a base dual $\xi_1, \ldots, \xi_n$ associada a base $b_1, \ldots, b_n$, i.e., o funcional ξ_k é dado por $\xi_k(x) = x_k$.

Assim, temos o espaço afim

$$A_{\xi_k} = \left\{ \sum_i x_i b_i : x_i \in \mathbb{K} \text{ e } x_k = 1 \right\}$$

e o aberto

$$U_{\xi_k} = \{[x_1, \ldots, x_n] : x_k \neq 0\}$$

de $\mathbf{P}(V)$, como foi discutido na seção anterior.

Para cada k, a carta $\phi_{\xi_k} : U_{\xi_k} \to A_{\xi_k}$ é dada por

$$\phi_{\xi_k}([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_i \frac{x_i}{x_k} b_i,$$

cuja inversa é a função

$$\phi_{\xi_k}^{-1}\left(\sum_i x_i b_i \right) = [x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Denotaremos ϕ_{ξ_k} por ϕ_k, U_{ξ_k} por U_k e identificaremos A_{ξ_k} com $\mathbb{K}^{n-1}$. Podemos desta forma escrever a carta $\phi_k : U_k \to \mathbb{K}^{n-1}$, dada por

$$\phi_k([x_1, \ldots, x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_k}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \ldots, \frac{x_n}{x_k} \right),$$

cuja inversa é dada por

$$\phi_k^{-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Não é difícil ver que $\cup_k U_k = \mathbf{P}(V)$ e, portanto, as cartas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ formam um atlas de $\mathbf{P}(V)$.

2.4. Espaço Tangente

No que segue sempre pensaremos em $\mathbf{P}(V)$ como variedade suave. Estudemos agora o espaço tangente de $\mathbf{P}(V)$.

Considere um ponto p do projetivo, uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $t : p \to V/p$ e uma função suave $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$. Para cada $x \in p$ não nulo e para cada representante v de $t(x)$ defina

$$tf = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v).$$

Essa aplicação $f \mapsto tf$ será uma derivação em p, isto é, um funcional linear de $C^\infty(\mathbf{P}(V))$ que satisfaz a regra de Leibniz.

Precisamos mostrar que a definição de tf independe da escolha de x e v.

Se v' é outro representante de $t(x)$, então $h := v - v' \in p$. Daí segue que

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v') + \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon h),$$

pois o diferencial[2] $d_x f$ é linear, isto é, $d_x f(v) = d_x f(v' + h) = d_x f(v') + d_x f(h)$.

Como $h \in p$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ satisfazendo $h = \alpha x$ e, portanto,

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon h) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f((1 + \alpha\epsilon)x) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x) = 0,$$

pois $f(x) = f((1 + \epsilon\alpha)x)$. Desta forma concluímos que

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v')$$

ou seja, nossa definição não depende da escolha de representante de $t(x)$. Se y é outro vetor não nulo de p, então há $\alpha \neq 0$ satisfazendo $y = \alpha x$. Se v é representante de $t(x)$, então $u = \alpha v$ é representante de $t(y)$. Assim,

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(\alpha x + \epsilon\alpha v) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(y + \epsilon u),$$

ou seja, não há dependência da escolha de x na definição de tf.

Repare que t é derivação, ou seja, temos o mapa $\mathbb{R}$-linear

$$T : \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \to T_p\mathbf{P}(V)$$

dado por $T(t) = t$.

Proposição 2.11 *Se* $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = 0$ *para toda* $f \in C^\infty(\boldsymbol{P}(V))$, *então* v *é paralelo a* x.

Demonstração: Considere uma base $b_1, \ldots, b_n$, onde $b_1 = x$. Temos que $v = \sum_i \alpha_i b_i$. Claramente, se $v' = \sum_{i \neq 1} \alpha_i b_i$, então temos

$$\frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v').$$

[2] Lembre-se do cálculo que $d_x f(v) := \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v)$.

Considere a função

$$f_i(u) = \frac{|u_1 + u_i|^2}{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}$$

de $C^\infty(\mathbf{P}(V))$, com $i = 2, \ldots, n$, onde $u = u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n$.

Para $i = 2, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f_i(x + \epsilon v') &= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \frac{1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2}{1 + [\alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2]\epsilon^2} \\
&= \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} (1 + 2\epsilon\alpha_i + \epsilon^2|\alpha_i|^2)\left(1 - \epsilon^2[\alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2] + o(\epsilon^2)\right) = 2\alpha_i,
\end{aligned}$$

de onde se conclui que $\alpha_i = 0$, pois $\frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f_i(x + \epsilon v') = 0$.

Assim, $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$, implicando que v é paralelo a x. ∎

Proposição 2.12 *A aplicação linear $T : \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \to T_pM$ é isomorfismo $\mathbb{R}$-linear.*

Demonstração: Mostremos primeiramente que T é injetora. Isso seguirá imediatamente da proposição anterior. Se

$$t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) \quad \text{e} \quad tf = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon v) = 0$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$, onde $x \in p \setminus \{0\}$ e v é representante de $t(x)$, então v é paralelo a x, ou seja, $t(x) = 0$ e, consequentemente, $t = 0$, o que garante a injetividade de T.

Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p) = (n-1)\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = \dim_{\mathbb{R}} T_p\mathbf{P}(V)$, segue que T é isomorfismo. ∎

Logo, podemos realizar a seguinte identificação

$$T_p\mathbf{P}(V) \cong \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p).$$

O projetivo $\mathbf{P}(V)$ herda a geometria de V. Dada uma forma Hermitiana não degenerada[3] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em V, podemos estudar como essa forma funciona no projetivo.

Definimos

$$\begin{aligned}
B(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p\rangle < 0\}; \\
S(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p\rangle = 0\}; \\
E(V) &= \{p \in \mathbf{P}(V) : \langle p, p\rangle > 0\}.
\end{aligned}$$

Assim temos

$$\mathbf{P}(V) = B(V) \sqcup S(V) \sqcup E(V).$$

Os pontos de $B(V)$ são os negativos, os pontos de $S(V)$ são os isotrópicos e os pontos de $E(V)$ são os positivos. A notação B, S e E se referem ao caso em que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tem assinatura $- + \cdots +$. Nesse caso, como veremos mais para frente, $B(V)$ é um "**B**all", $S(V)$ é um "**S**phere"e $E(V)$ se refere a "**E**lsewhere".

[3] Sempre assumiremos que as formas Hermitianas são não degeneradas a menos que seja dito o contrário.

Proposição 2.13 *Se $p \in \boldsymbol{P}(V)$ não é isotrópico, então V/p e $p^\perp$ são naturalmente $\mathbb{K}$-isomorfos.*

Demonstração: Considere a aplicação $\mathbb{K}$-linear $S : p^\perp \to V/p$ dada por $T(v) = [v]$. Mostremos que T é injetora. Se $T(v) = [v] = [0]$, então $v \in p$ e, portanto, $v \in p \cap p^\perp$. Pela proposição 1.11 temos que $p \cap p^\perp = 0$, pois p é subespaço não degenerado, já que $\langle p, p \rangle \neq 0$. Daí segue que $v = 0$ e, portanto, S é injetora.

Por S ser injetora concluímos que é isomorfismo, pois $\dim_{\mathbb{K}} p^\perp = \dim_{\mathbb{K}} V/p = n - 1$.

∎

Logo, no caso em que p é não isotrópico podemos escrever

$$V/p \cong p^\perp$$

e, portanto,

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp) \cong \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, V/p).$$

Desta forma, se $t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp)$, então podemos derivar $f \in C^\infty(\mathbf{P}(V))$ da seguinte forma:

$$tf = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} f(x + \epsilon t x).$$

Para todo ponto não isotrópico p também podemos definir a forma hermitiana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p\mathbf{P}(V) \times T_p\mathbf{P}(V) \to \mathbb{K}$$

dada por

$$\langle t_1, t_2 \rangle_p = \frac{\langle t_1 p, t_2 p \rangle}{\langle p, p \rangle}$$

ou por

$$\langle t_1, t_2 \rangle_p = -\frac{\langle t_1 p, t_2 p \rangle}{\langle p, p \rangle}.$$

Assim, a aplicação $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é uma métrica hermitiana em $\mathbf{P}(V) \setminus S(V)$. Quando não houver ambiguidade, omitiremos o índice p da fórmula $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Normalmente escolhemos o sinal que for mais conveniente no contexto.

A parte real $g_p = \mathrm{Re} \langle \cdot, \dot{\rangle}_p$ é uma métrica pseudo-Riemanniana.

2.5. Campos Vetoriais

Definição 2.14 *Considere o ponto p não isotrópico de $\boldsymbol{P}(V)$. Temos as seguintes projeções:*

$$\begin{aligned} \pi'[p] : V &\to V \\ v &\mapsto \frac{\langle v, p \rangle}{\langle p, p \rangle} p \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi[p] : V &\to V\\ v &\mapsto v - \pi'[p]v.\end{aligned}$$

A projeção π' projeta vetores na direção de p e π projeta vetores em $p^\perp$.

Observação 2.15 *A aplicação $\pi'[p]$ está bem definida porque para cada $v \in V$ a função*

$$x \mapsto \frac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x$$

de $V^\times$ em V é homogênea de grau 0.

Se $t \in T_p\mathbf{P}(V) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(p, p^\perp)$, então podemos estender t para $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$ definindo $t|_{p^\perp} = 0$. Assim, temos

$$T_p\mathbf{P}(V) \subset \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V).$$

De agora em diante, sempre pensaremos em $T_p\mathbf{P}(V)$ como subespaço de $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$.

Se $t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$, então podemos definir o vetor $t_p \in T_p\mathbf{P}(V)$ pela fórmula

$$t_p = \pi[p] \circ t \circ \pi'[p].$$

Repare que essa aplicação $t \mapsto t_p$ de $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$ em $T_p\mathbf{P}(V)$ é uma projeção linear.

Para $t \in T_p\mathbf{P}(V)$ valem as seguintes propriedades:

1. $t \circ \pi'[p] = \pi[p] \circ t = t$,
2. $\pi'[p] \circ t = t \circ \pi[p] = 0$.

O interessante é que essas duas propriedades caracterizam $T_p\mathbf{P}(V)$.

Proposição 2.16 *Se $t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$ satisfaz os itens 1 e 2 acima, então $t \in T_p\boldsymbol{P}(V)$.*

Demonstração: Como $t \circ \pi'[p] = t$ e $t \circ \pi[p] = 0$, temos que $t|_p = t$ e $t|_{p^\perp} = 0$.

Além disso, de $\pi[p] \circ t = t$ e $\pi'[p] \circ t = 0$, concluímos que $\mathrm{Im}\, t \subset p^\perp$. Assim, t é extensão da transformação linear $p \to p^\perp$ dada por $x \mapsto t(x)$ e $t|_{p^\perp} = 0$. Logo, $t \in T_p\mathbf{P}(V)$. ∎

Definição 2.17 *Seja $U \subset \boldsymbol{P}(V)$ aberto sem pontos isotrópicos. Um campo vetorial A em U é uma função suave $A : U \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V)$ tal que $A(p) \in T_p\boldsymbol{P}(V)$ para todo $p \in U$. Denotaremos o conjunto dos campos vetoriais em U por $\mathfrak{X}(U)$.*

Claramente temos a seguinte identificação:

$$\mathfrak{X}(U) = \{A : \pi^{-1}U \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V,V) : A \text{ é homogêneo de grau } 0 \text{ e } A(x) \in T_{[x]}\mathbf{P}(V)\},$$

onde $\pi : V^\times \to \mathbf{P}(V)$ é a projeção natural.

Entre os campos vetoriais existem os seguintes campos especiais.

Definição 2.18 *O campo espalhado de* $t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(V, V)$ *é o campo suave definido pela fórmula*

$$T(p) := t_p.$$

Mais explicitamente,

$$T(p) = \pi[p] \circ t \circ \pi'[p].$$