Introdução à Teoria dos Grafos

Aula 6

6. Uma Aplicação de Trilhas Eulerianas em Álgebra.

Definição 1. Um *multigrafo* é um grafo em que múltiplas arestas ligando os mesmos dois vértices finais e arestas com um único vértice final ("loop") são permitidos.

Definição 2. Um *grafo orientado* é um grafo direcionado obtido orientando-se as arestas de um grafo, isto é, dando-se à aresta ab a orientação $\vec{ab}$ ou $\vec{ba}$. Então, um grafo orientado é um grafo direcionado em que, no máximo, uma das orientações $\vec{ab}$ ou $\vec{ba}$ ocorre. Tal definição também vale para um *multigrafo orientado.*

Definição 3. Uma trilha num multigrafo orientado é uma sequência alternada de vértices e arestas: $x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, ..., e_l, x_l$, tal que cada e_i começa em x_{i-1} e termina em x_i.

Definição 4. *Grau de saída* de um vértice x de um grafo orientado é o total de arestas começando em x, e é denotado por $d^+(x)$. *Grau de entrada* de um vértice x de um grafo orientado é o total de arestas terminando em x, e é denotado por $d^-(x)$.

Definição 5. O *comutador* de dois elementos a e b de um anel S é $[a, b] = ab - ba$. Similarmente, se $a_i \in S, 1 \leq i \leq k$, escrevemos

$$[a_1, a_2, ..., a_k] = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{\sigma 1} a_{\sigma 2} ... a_{\sigma k},$$

onde o somatório percorre todas as permutações σ dos inteiros $1, 2, ..., k$.

Teorema 1. Seja R um anel comutativo e tome as matrizes $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ em $M_n(R)$. Então, $[A_1, A_2, ..., A_k] = 0$.

Demonstração. Deduziremos o resultado de um lema sobre trilhas Eulerianas em multigrafos orientados. Seja $\vec{G}$ um multigrafo orientado de ordem n com arestas $e_1, e_2, ..., e_m$. Então, a cada aresta e_i, associamos um par ordenado não necessariamente distinto de vértices, os vértices inicial e final e_i. Toda trilha Euleriana orientada P é prontamente identificada com uma permutação de $\{1, 2, ..., m\}$; defina $\varepsilon(P)$ como o sinal dessa permutação. Dados os vértices x e y, não necessariamente distintos, de $\vec{G}$, $\varepsilon(\vec{G}; x, y) = \sum_P \varepsilon(P)$, onde a soma percorre todas as trilhas Eulerianas de x a y.

Lema 1. Se $m \geq 2n$, então $\varepsilon(\vec{(G)}; x, y) = 0$.

Assumiremos o lema acima para continuarmos a prova. Então, seja $E_{ij} \in M_n(R)$ para a matriz cuja única entrada não nula é a que possui 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. Como $[A_1, A_2, ..., A_{2n}]$ é R-linear em cada variável e $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base para $M_n(R)$ como um R-módulo, basta provar o teorema quando $A_k = E_{i_k j_k}$ para cada k. Assumindo esse caso, seja $\vec{G}$ o multigrafo orientado com conjunto de vértices $\{1, 2, ..., n\}$ e conjunto de arestas com orientação é $\{i_1 j_1, i_2 j_2, ..., i_{2n} j_{2n}\}$. Por definição, o produto $A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} ... A_{\sigma 2n}$ é E_{ij} se a correspondente sequência de arestas é uma trilha Euleriana orientada de i a j e, caso contrário, é nulo. Portanto, $[A_1, A_2, ..., A_{2n}] = \sum i, j \varepsilon(\vec{G}; i, j) E_{ij}$. Pelo lema, tal soma é nula. $\square$