Introdução à Teoria dos Grafos

Aula 4

5. Coloração.

Definição 1. Dado um grafo G, o valor mínimo k para o qual $V(G)$ pode ser particionado em k classes, digamos $V_1, V_2, ..., V_k$, tais que nenhuma aresta una dois vértices na mesma classe é chamado *número cromático* de G e denotado $\mathcal{X}(G)$.

Observação 1. Se G contém o subgrafo K_k

$$\mathcal{X}(G) \geq \mathcal{X}(K_k) = k.$$

Definição 2. Chamamos *número clique* de um grafo G a ordem máxima de um subgrafo completo de G e denotamos por $\omega(G)$.

Observação 2.

$$\mathcal{X}(G) \geq \omega(G).$$

Definição 3. Uma *k-coloração* dos vértices de um grafo G é uma função $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ tal que cada conjunto $c^{-1}(j)$ é independente.

Definição 4. O *número de independência* de um grafo G é o máximo tamanho de um conjunto de vértices independente e é denotado $\alpha(G)$.

Observação 3.

$$\mathcal{X}(G) \geq \max\{\omega(G), |G|/\alpha(G)\}.$$

Tentativa de colorir um grafo com o mínimo número de cores. Uma abordagem possível é ordenar os vértices, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$, e então coroli-los um por um: dê a x_1 a cor 1, a x_2 a cor 1 se $x_1x_2 \ni E(G)$ e a cor 2, caso contrário, e assim por diante. Tal algoritmo é chamado *algoritmo guloso.*

Note que o algoritmo guloso usa, no máximo, $\Delta(G) + 1$ cores para colorir os vértices de um grafo G. De fato, quando chegamos na etapa de colorir o vértice x, de grau $d(x)$, pelo menos uma das $d(x)+1$ primeiras cores não foi usada em nenhum vizinho de x, logo pelo menos uma dessas cores está disponível para x.

Teorema 1. Seja $k = \max_H \delta(H)$, onde o máximo é tomado sobre todos os subgrafos induzidos de G. Então, $\mathcal{X}(G) \leq k+1$.

Demonstração. O grafo G tem um vértice de grau, no máximo, k; seja x_n tal vértice e tome $H_{n-1} = G - \{x_n\}$. Por hipótese, H_{n-1} tem um vértice de grau, no máximo, k. Seja x_{n-1} um desses vértices e tome $H_{n-2} = H_{n-1} - \{x_{n-1}\} = G - \{x_1, x_2\}$. Continuando dessa forma, enumeramos todos os vértices.

Agora, a sequência $x_1, x_2, ..., x_n$ é tal que cada x_j está unido a, no máximo, k vértices precedentes. Logo, o algoritmo guloso nunca precisará de $k+2$ cores para colorir um vértice. □

Definição 5. O *índice cromático* de um grafo G, denotado por $\mathcal{X}'(G)$ é o número mínimo de cores necessário para colorir as arestas de um grafo de forma que duas arestas adjacentes não tenham a mesma cor.