Introdução à Teoria dos Grafos

Aula 4

4. Grafos Planares.

Definição 1. Um *grafo planar* é um grafo possível de ser representado por um desenho no plano no qual os vértices correspondem a pontos distintos e as arestas a curvas simples conectando os pontos correspondentes a seus vértices finais, de forma que duas curvas distintas são disjuntas ou se interceptam nos pontos de seus vértices finais. Tal representação é dita *grafo plano*.

Definição 2. Sejam $p_1, p_2, ...$ pontos distintos de $\mathbb{R}^3$ tais que qualquer plano de $\mathbb{R}^3$ intercepta, no máximo, 3 destes pontos. Escreva (p_i, p_j) para o segmento de reta com pontos finais p_i e p_j. Dado o grafo $G = (V, E), V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, o espaço topológico

$$R(G) = \bigcup \{(p_i, p_j) : x_i x_j \in E\} \cup \bigcup_1^n \{p_i\} \subset \mathbb{R}^3$$

é dito uma *realização* de G. Um grafo é *planar* se $R(G)$ é homeomorfa a um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Observação 1. As definições anteriores são equivalentes.

Definição 3. As componentes conexas resultantes de quando omitimos os vértices e arestas de um grafo plano são chamadas *faces*.

Teorema 1. (Fórmula de Euler) Um grafo plano conexo G com n vértices, m arestas, e f faces satisfaz

$$n - m + f = 2.$$

Demonstração. Aplicaremos indução no número de faces. Se $f = 1$, então G não contém um ciclo, então G é uma árvore, e o resultado segue, pois G tem $n - 1$ arestas.

Suponha, agora, que $f > 1$ e o resultado vale para valores menores de f. Seja ab uma aresta num ciclo de G. Como um ciclo separa o plano, a aresta ab está numa fronteira entre duas faces S e T. Omitindo ab, num novo grafo G', as faces S e T juntam-se para formarem uma nova face, enquanto todas as demais faces de G permanecem imutáveis. Então, se n', m' e f' são os novos parâmetros de G', seque que $n = n'$, $m' = m - 1$ e $f' = f - 1$. Portanto, $n - m + f = n' - m' + f' = 2$. $\square$

Definição 4. Uma *ponte* num grafo planar é uma aresta que não está contida em nenhum ciclo.

Seja G um grafo plano conexo com n vértices, m arestas, e f faces, e f_i o número de faces contendo exatamente i arestas nas suas fronteiras. Claramente,

$$\sum_i F_i = f,$$

e, se G não tem pontes, então

$$\sum_i i f_i = 2m.$$

Tais relações e a fórmula de Euler nos dão um limitante superior para o número de arestas de um grafo planar de ordem n.

Definição 5. Uma *cintura* de um grafo é o número de arestas no seu menor ciclo.

Teorema 2. Um grafo planar de ordem $n \geq 3$ tem, no máximo, $3n - 6$ arestas. Além disso, um grafo planar de ordem n e cintura pelo menos $g, 3 \leq g < \infty$, tem tamanho máximo

$$\max\left(\frac{g}{g-2}(n-2), n-1\right).$$

Demonstração. A primeira afirmação é o caso $g = 3$ da segunda, então basta provar a segunda afirmação. Seja G um grafo planar de ordem n, tamanho m, e cintura pelo menos g. Se $n \leq g - 1$, então, G é acíclico, logo $m \leq n - 1$. Assuma, agora, que $n \geq g$ e que a afirmação vale para valores menores de n. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que G é conexo. Se ab é uma ponte, então $G - ab$ é união de dois subgrafos disjuntos, digamos G_1 e G_2. Tomando $n_i = |G_i|, m_i = e(G_i), i = 1, 2$, por indução, encontramos

$$\begin{aligned} m = m_1 + m_2 + 1 &\leq \max\left(\frac{g}{g-2}(n-2), n-1\right) \\ &+ \max\left(\frac{g}{g-2}(n_2-2), n_2-1\right) + 1 \\ &\leq \max\left(\frac{g}{g-2}(n-2), n-1\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, se G não tem ponte,

$$2m = \sum_i i f_i = \sum_{i \geq g} i f_i \geq g \sum_i f_i = gf.$$

Portanto, pela fórmula de Euler,

$$m + 2 = n + f \leq n + \frac{2}{g}m,$$

e então

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2).$$

□

Definição 6. Um grafo H é dito uma *subdivisão* de um grafo G, ou um *grafo G topológico* se H é obtido de G pela subdivisão de algumas das suas arestas, isto é, pela troca das arestas por caminhos tendo, no máximo, seus vértices finais em comum.

Teorema 3. Um grafo é planar se, e só se, não contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.