Introdução à Teoria dos Grafos

Aula 3

Teorema 4. As seguintes afirmações são equivalentes para um grafo G:

i. G é uma árvore.

ii. G é um grafo conexo minimal, isto é, G é conexo e, se $xy \in E(G)$, então $G - xy$ é desconexo.

iii. G é um grafo maximal acíclico, isto é, G é acíclico e, se x, y são vértices não adjacentes de G, então $G + xy$ contém um ciclo.

Demonstração. Suponha que G é uma árvore. Para uma aresta $xy \in E(G)$, o grafo $G - xy$ não pode conter um caminho $x - y$ $xz_1z_2...z_ky$, caso contrário, G conteria o ciclo $xz_1z_2...z_ky$. Portanto, $G - xy$ é desconexo, e, então, G é um grafo conexo minimal. Similarmente, se x e y são vértices não adjacentes da árvore G, então G contém um caminho $xz_1....z_ky$, e, então, $G + xy$ contém o ciclo $xz_1...z_ky$. Portanto, G é um grafo acíclico maximal.

Suponha, agora, que G é um grafo conexo minimal. Se G contém um ciclo $xz_1z_2...z_ly$, então $G - xy$ ainda é conexo, uma vez que num passeio $u - v$ em G a aresta xy pode ser substituída pelo caminho $xz_1...z_ky$. Logo, G é acíclico e, portanto, é uma árvore.

Finalmente, suponha que G é um grafo acíclico maximal. G é conexo, uma vez que, se x e y pertencem a diferentes componentes, $G + xy$ não tem o ciclo $xz_1...z_ky$. Logo, G é uma árvore.

□

Construindo árvores. Tome um vértice x, e seja $V_i = \{y \in G : d(x, y) = i\}, i = 0, 1, ...$ Note que, se $y_i \in V_i, i > 0$, e $xz_1z_2...z_{i-1}y_i$ é um caminho $x - y_i$, então $d(x, z_j) = j$ para todo $0 < j < i$. Em particular, $V_j \neq \emptyset$, e, para todo $y \in V_i$, $i > 0$, existe um vértice $y' \in V_{i-1}$ ligado a y. Seja T o subgrafo de G com conjunto de vértices V e conjunto de arestas $E(T) = \{yy' : y \neq x\}$. Então, T é conexo, uma vez que, se W é qualquer subconjunto de V e w é um vértice em W com distância máxima até x, então w está unido a, no máximo, um vértice de W.

Como, pelo teorema 4, toda árvore tem uma única árvore de extensão, ela mesma, temos o seguinte resultado:

Corolário 2. Uma árvore de ordem n tem tamanho $n - 1$; uma floresta de ordem n com k componentes tem tamanho $n - k$.

Demonstração. Construção da árvore. □

Corolário 3. Uma árvore de ordem pelo menos 2 contém pelo menos 2 vértices de grau 1.

Demonstração. Seja $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$ uma sequência de graus de uma árvore T de ordem $n \geq 2$. Como T é conexa, $\delta(T) = d_1 \geq 1$. Como, se T tem no máximo um vértice de grau 1, pelo corolário 2,

$$2n - 2 = 2e(T) = \sum_{1}^{n} d_i \geq 1 + 2(n-1).$$

□

3. Ciclos Hamiltonianos e circuitos Eulerianos.

Definição 1. Um ciclo contendo todos os vértices de grafo é dito um *ciclo Hamiltoniano* do grafo. Um *caminho Hamiltoniano* de um grafo é um caminho contendo todos os vértices do grafo. Um grafo contendo um ciclo Hamiltoniano é dito Hamiltoniano.

Teorema 1. Para $n \geq 3$, o grafo completo K_n é decomponível em ciclos Hamiltonianos sem arestas em comum se, e só se, n é ímpar. Para $n \geq 2$, o grafo completo K_n é decomponível em caminhos Hamiltonianos sem arestas em comum se, e só se, n é par.

Demonstração. Como K_n é $(n-1)$-regular, e um ciclo Hamiltoniano é 2-regular, uma condição necessária para decompormos K_n em ciclos é que $n-1$ seja par, isto é, n deve ser ímpar.

Vamos assumir, agora, que n é ímpar, $n \geq 3$. Excluindo-se um vértice de K_n, vemos que, se K_n é união de $\frac{1}{2}(n-1)$ ciclos Hamiltonianos, K_{n-1} é a união de $\frac{1}{2}(n-1)$ caminhos Hamiltonianos. Vemos que, para valores pares de n, o grafo K_{n-1} é, de fato, a união de $\frac{1}{2}(n-1)$ caminhos Hamiltonianos. Nessa decomposição de K_{n-1} em $\frac{1}{2}(n-1)$ caminhos Hamiltonianos, cada vértice é vértice final de exatamente um caminho Hamiltoniano. Consequentemente, se adicionarmos um novo vértice u a K_{n-1} e estendermos cada caminho Hamiltoniano em K_{n-1} a um ciclo em K_n, obtemos uma decomposição de K_n em $\frac{1}{2}(n-1)$ ciclos Hamiltonianos sem arestas em comum.

□

Definição 2. Um *circuito Euleriano* em G é um circuito contendo todas as arestas de G. Uma trilha contendo todas as arestas é uma *trilha Euleriana.* Um grafo é Euleriano se tem um circuito Euleriano.

Teorema 2. Um grafo conexo não trivial tem um circuito Euleriano se, e só se, cada vértice tem grau par. Um grafo conexo tem uma trilha Euleriana de um vértice X a um vértice y se, e só se, x e y são os únicos vértices com grau ímpar.

Demonstração. As condições são claramente necessárias. Por exemplo, se G tem um circuito Euleriano $x_1x_2...x_m$ e x ocorre k vezes na sequência $x_1, x_2, ..., x_m$, então $d(x) = 2k$.

Provamos a suficiência da primeira condição por indução no número de arestas. Se não existem arestas, não há o que provar. Então, seguimos por indução.

Seja G um grafo conexo não trivial no qual cada vértice tem grau par.

Seja $e(G) \geq 1$, sabemos que $\delta(G) \geq 2$, então, pelo corolário 3 da seção 2, G contém um ciclo. Seja C um circuito em G com o número máximo de vértices. Suponha que C não é Euleriano. Como G é conexo, C contém um vértice x numa componente não trivial H de $G - E(C)$. Todo vértice de H tem grau par em H, então, por hipótese de indução, H contém um circuito Euleriano D. Os circuitos D e C são disjuntos por arestas e têm um vértice em comum, então podem ser concatenados para formarem um circuito com mais arestas que C. Como isso contradiz a maximalidade de $e(C)$, o circuito C é Euleriano.

Suponhamos, agora, que G é conexo e x e y são os únicos vértices de grau ímpar. Seja G^* obtido de G adicionando-se a G um vértice u junto com as arestas ux e xy. Então, pela primeira parte, $G*$ tem um circuito Euleriano C^*. Claramente, $C^* - u$ é uma trilha Euleriana de x a y.

$\square$