Introdução à Teoria dos Grafos

Aula 2

Teorema 2. Todo grafo de ordem n e tamanho maior que $\lfloor n^2/4 \rfloor$ contém um triângulo.

Demonstração. Seja G um grafo sem triângulos de ordem n. Então, $\Gamma(x) \cap \Gamma(y) = \emptyset$ para toda aresta $xy \in E(G)$. Segue que

$$d(x) + d(y) \leq n.$$

Somando tais desigualdades, para todas as arestas xy de G, temos que

$$\sum_{x \in G} d(x)^2 \leq ne(G).$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy,

$$\begin{aligned} (2e(G))^2 &= \left(\sum_{x \in G} d(x)\right)^2 \leq n\left(\sum_{x \in G} d(x)^2\right) \\ (2e(G))^2 &\leq n^2 e(G), \end{aligned}$$

implicando que $e(G) \leq n^2/4$.

□

Definição 17. Dados os vértices x e y, a *distância* $d(x, y)$ é o mínimo comprimento de um caminho $x - y$. Se não existe tal caminho, $x - y$, então $d(x, y) = \infty$.

Definição 18. Um grafo é conexo se, para cada par $\{x, y\}$ de vértices distintos, existe um caminho de x para y. Um subgrafo conexo maximal e uma *componente* do grafo.

Definição 19. Um grafo sem ciclos é uma *floresta* ou *grafo acíclico*; uma *árvore* é uma floresta conexa.

Definição 20. Um grafo G é um grafo *bipartido* com classes de vértices V_1 e V_2 se $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e toda aresta une um vértice de V_1 com um vértice de V_2.Também podemos dizer que G tem bipartição (V_1, V_2). Similarmente, G é *r-partido* com classes de vértices $V_1, V_2, ..., V_r$ (ou r-partição $(V_1, ..., V_r)$) se $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r, V_i \cap V_j = \emptyset$ sempre que $1 \leq i < j \leq r$, e nenhuma aresta une vértices na mesma classe.

Notação 12. O símbolo $K(n_1, ..., n_r)$ denota um grafo r-partido completo: ele tem n_i vértices na i-ésima classe e contém todas as arestas unindo vértices entre as classes. Por simplicidade, usualmente escrevemos $K_{p,q}$ em vez de $K(p,q)$ e $K_r(t)$ em vez de $K(t,...,t)$.

Notação 13. Escrevemos $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ e kG para a união de k cópias disjuntas de G. Obtemos $G+H$ adicionando todas as arestas entre G e H a $G \cup U$.

Exemplo 1. $K_{2,3} = E_2 + E_3 = \overline{K_2} + \overline{K_3}$ e $K_r(t) = E_t + ... + E_t = \overline{K_t} + ... + \overline{K_t}$.

2. Caminhos, ciclos e árvores.

Teorema 1. Seja x um vértice de um grafo G e seja W o conjunto de vértices de uma componente contendo x. Então, valem as seguintes afirmações:

i. $W = \{y \in G : G$ contém um caminho $x - y\}$,

ii. $W = \{y \in G : G$ contém uma trilha $x - y\}$,

iii. $W = \{y \in G : d(x,y) < \infty\}$,

iv. para $u, v \in V = V(G)$, seja uRv se, e só se, $uv \in E(G)$, e seja $\tilde{R}$ a menor relação de equivalência em V contendo R. Então, W é a classe de equivalência de x.

Esse resultado implica que todo grafo é uma união disjunta de suas componentes.

Teorema 2. Um grafo é bipartido se, e só se, não contém um ciclo ímpar.

Demonstração. Suponha G bipartido com classes de vértices V_1 e V_2. Seja $x_1x_2...x_l$ um ciclo em G. Podemos assumir que $x_1 \in V_1$. Então, $x_2 \in V_2, x_3 \in V_1$, e assim por diante: $x_i \in V_1$ se, e só se, i é ímpar. Como $x_l \in V_2$, descobrimos que l é par.

Suponha, agora, que G não contém um ciclo par. Como um grafo é bipartido se, e só se, cada componente o é, podemos assumir que G é conexo. Tome um vértice $x \in V(G)$, e seja $V_1 = \{y : d(x,y)$ é par $\}, V_2 = V - V_1$. Não existe aresta unindo dois vértices da mesma classe V_i, pois, nesse caso, G conteria um ciclo ímpar. Logo G é bipartido.

□

Um grafo bipartido com bipartição (V_1, V_2) tem, no máximo, $|V_1||V_2|$ arestas, então um grafo bipartido de ordem n tem, no máximo, $\max_k k(n-k) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ arestas, com o máximo atingido para o grafo bipartido $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$. Pelo teorema 2, $\lfloor n^2/4 \rfloor$ é também o máximo tamanho de um grafo de ordem n que não contém ciclos ímpares. Na verdade, como visto no teorema 2 da seção 1, proibir um único ciclo ímpar, o triângulo, restringe o tamanho da mesma forma.

Teorema 3. Um grafo é uma floresta se, e só se, para cada par $\{x, y\}$ de vértices distintos, este contém, no máximo, um caminho $x - y$.

Demonstração. Se $x_1, x_2, ..., x_l$ é um ciclo num grafo G, então $x_1x_2...x_l$ e x_1x_l são caminhos distintos.

Por outro lado, sejam $P_1 = x_0x_1...x_l$ e $P_2 = x_0y_1y_2...y_kx_l$ dois caminhos $x_0 - x_l$ distintos num grafo G. Seja $i+1$ o índice mínimo para o qual $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ e seja j o índice mínimo para o qual $j \geq i$ e y_{j+1} é um vértice de P_1, digamos $y_{j+1} = x_n$. Então, $x_ix_{i+1}...x_ny_jy_{j-1}...yi + 1$ é um ciclo em G.

□

Teorema 4. As seguintes afirmações são equivalentes para um grafo G:

i. G é uma árvore.

ii. G é um grafo conexo minimal, isto é, G é conexo e, se $xy \in E(G)$, então $G - xy$ é desconexo.

iii. G é um grafo maximal acíclico, isto é, G é acíclico e, se x, y são vértices não adjacentes de G, então $G + xy$ contém um ciclo.

Corolário 1. Todo grafo conexo contém uma árvore de extensão, isto é, uma árvore contendo todo vértice do grafo.

Demonstração. Tome o subgrafo de extensão conexo minimal. □